Doğrusal Programlama

GİRİŞ

Prof. Dr. Ünal H. ÖZDEN

Karar Verme

"Algılanan ihtiyaçlara özgü kasıtlı ve düşünceli seçim" (Kleindorfer ve diğ., 1993)

"Karar Verici (KV)'nin mevcut tüm seçenekler arasından amacına veya amaçlarına en uygun bir veya birkaç seçeneği seçme sürecine girmesi" (Evren ve Ülengin, 1992)

En genel hali ile karar verme; KV'nin mevcut seçenekler arasından bir seçim, sıralama ya da sınıflandırma yapması gibi bir sorunu çözmesi sürecidir

İyi Bir Karar

- Karar verme kalitesini ölçecek tek bir ortak ölçü saptanamamıştır (Olson ve Courtney, 1992)
- İyi karar verme sanatı sistematik düşünce ile oluşur (Hammond ve diğ., 1999)
- İyi bir karar;
  - Mantığa dayanır
  - Tüm mevcut kaynakları kullanır
  - Tüm olası seçenekleri inceler
  - Sayısal bir yöntem uygular

Karar Verme Süreci

Dar anlamda karar verme, çeşitli alternatifler içinde en uygun olanının seçiminin yapıldığı bir süreç olarak tanımlanabilir.

Karar Verme Süreci, değişik kaynaklarda farklı aşamalarla sıralanmıştır. Ancak farklı yaklaşımların ortak noktaları dikkate alındığında, söz konusu sürecin aşamalarını aşağıdaki gibi ifade etmek yanlış olmaz.

1. Karar probleminin tanımlanması
   - -Karar verecek kişi veya kişiler
   - -Amaç
   - -Alternatif eylem biçimleri
   - -Belirsizlik
2. Karar probleminin modelinin kurulması

   Problemin kolayca çözümlenebilmesi için diğer bir deyişle problemi en iyi biçimde temsil edecek ve problemin çözümündeki belirsizlikleri en aza indirecek bir modelin kurulması gerekir.

   Model: Bir sistemin değişen şartlar altındaki davranışlarını incelemek, kontrol etmek ve geleceği hakkında tahminlerde bulunmak amacıyla elemanları arasındaki bağıntıları kelimler veya matematik terimlerle belirten ifadeler topluluğuna model denir.
3. Modelden çözüm elde edilmesi
4. Modelin çözümünün test edilmesi
5. Karar verme ve kararın uygulamaya konulması

Doğrusal Programlama

Günümüzde, işletme, ekonomi ve muhasebe dallarını en yakından ilgilendiren konulardan bir olan doğrusal programlama, aynı zamanda yöneylem araştırmasında da en önemli konulardan biridir. Doğrusal programlama, kaynakların optimal dağılımını elde etmeye, maliyetleri minimize, karı ise maksimize etmeye yarayan bir tekniktir.

Doğrusal Programlama, optimizasyon problemlerinin çözümünde kullanılan bir yöntemdir. 1947' de, George Dantzig, doğrusal Programlama problemlerinin çözümünde kullanılan etkin bir yol olan Simpleks Algoritma' yı buldu ve bu buluşla birlikte doğrusal Programlama, sıklıkla ve hemen hemen her sektörde kullanılmaya başlandı.

Temel olarak, doğrusal Programlama, kıt kaynakların optimum şekilde dağılımını içeren deterministik bir matematiksel tekniktir.

Doğrusal programlama, iyi tanımlanmış doğrusal eşitliklerin veya eşitsizliklerin kısıtlayıcı koşulları altında doğrusal bir amaç fonksiyonunu en iyi (optimum/ maksimizasyonminimizasyon) kılan değişken değerlerinin belirlenmesinde kullanılan matematiksel programlama tekniğidir.

DP Modelinin Yapısal Unsurları-devam

1.Amaç fonksiyonu

Karar vericinin ulaşmak istediği hedef doğrusal bir denklem ile açıklanır. Amaç fonksiyonu olarak bilinen bu denklem, karar değişkenleri ile karar vericinin amacı arasındaki fonksiyonel ilişkiyi gösterir.

$Z_{enk/enb}=c_1x_1 + c_2x_2 + ...c_nx_n$

$$Z_{enb/enk} = \sum_{j=1}^{n} C_j x_j$$

2. Kısıtlayıcı fonksiyonlar (kısıtlayıcılar/kısıtlar)

Karar değişkenleri ve karar değişkenleriyle parametrelerin birbirleriyle olan ilişkilerinde sağlanması zorunlu olan ilişkilerin matematiksel olarak açıklanmasıyla elde edilen denklemlere kısıtlayıcı fonksiyonlar denir. Kısıtlayıcıların değerleri kesin olarak önceden belirlenmiş olup sistemin tanımlanmasında kullanılır. Kısıtlayıcı fonksiyonlar sadece kaynakların sınırlarını değil, gereksinim ve yönetim kararlarını ifade etmekte de kullanılır.

$a_{11}x1+a_{12}x_2+..................+a_{1n}x_n \leq = \geq b_1$

$a_{21}x1+a_{22}x_2+..................+a_{2n}x_n \leq = \geq b_2$

… … … … …

$a_{m1}x1+a_{m2}x_2+................+a_{mn}x_n \leq = \geq b_m$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ (\leq;=;\geq) b_i \quad (i = 1, 2, 3, ..., m)$$

3. Negatif olmama koşulları

Karar değişkenlerinin değerleri negatif olmaz.

$x_1, x_2,........x_n \geq 0$ veya kısaca $x_j \geq 0$ (j=1, 2, 3, …, n)

DP Modelinin Yapısal Unsurları-devam

4. Karar değişkenleri

Karar vericinin denetimi altında olan niteliklere karar değişkenleri denir. Bunlar modele ilişkin bilinmeyenler olup değerleri modelin çözümünden sonra belirlenir. Bu değişkenler karar vericinin denetimi altında olduklarından bunlara kontrol değişkenleri de denir.

x_j: Belirli bir zaman döneminde j'inci ürünün üretim miktarı veya faaliyet düzeyi.

j=1, 2, 3, …n : Ürün çeşidi, faaliyet sayısı.

5. Parametreler

Alabileceği değerlerde karar vericinin hiçbir etkisi olmayan niteliklere parametre veya kontrol dışı değişkenler denir. Belirli koşullarda belirli değerler alan parametreler problem için veri durumundadır.

C_j: j'inci karar değişkeninin amaç fonksiyonu katsayısı (parametre)-(birim kar, birim fiyat, birim maliyet vs.).

a_{ij}: j'inci üründen bir birim üretmek için i'inci kaynaktan tüketilen kaynak miktarı veya girdi katsayısı

b_i: n sayıdaki ürün için elde bulunan i'inci sınırlı kaynak miktarı.

i= 1, 2, 3, …, m : Üretim bölümlerinin veya üretim kaynaklarının sayısı.

DP Modelinin Genel Görünümü

Amaç Fonksiyon $Z_{enk/enb}=c_1x_1 + c_2x_2 + ...c_nx_n$

Kısıtlayıcı fonksiyonlar

$a_{11}x1+a_{12}x_2+.................+a_{1n}x_n \leq = \geq b_1$

$a_{21}x1+a_{22}x_2+.................+a_{2n}x_n \leq = \geq b_2$

$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$

$a_{m1}x1+a_{m2}x_2+................+a_{mn}x_n \leq = \geq b_m$

Negatif Olmama Koşulu $x_1, x_2,........x_n \geq 0$

DP Modelinin Matris Gösterimi

Amaç Fonksiyonu

$$Z_{enb/enk} = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 & . & . & . & C_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix} = \mathbf{Cx}$$

Kısıtlayıı Fonksiyonlar

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & . & .\,a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & . & .\,a_{2n} \\ . & . & . & . \quad . \\ a_{m1} & a_{m2} & . & .\,a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ x_n \end{bmatrix} (\leq;=;\geq) \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ b_m \end{bmatrix} = \mathbf{Ax}\ (\leq;=;\geq)\ \mathbf{b}$$

DP'nin Varsayımları

1.Doğrusallık (veya Oransallık) Varsayımı: Modeldeki fonksiyoların hepsi doğrusaldır. Bu varsayım gerçekleşmediği takdirde DOP söz konusudur.

2.Toplanabilirlik Varsayımı

3.Kesinlik Varsayımı:

Bu varsayım, tüm parametrelerin (amaç fonksiyonu katsayısı, sağ el tarafı ve teknolojik katsayı) kesin olarak bilindiğini ve ilgili dönemde değişmeyeceğini öngörür. Eğer bu değerler tam olarak bilinmiyorsa, sonuç güvenilir olmayacaktır. Böyle bir durumda duyarlılık analizine başvurulabilir.

4. Negatif Olmama Varsayımı

Karar değişkenleri negatif değerler alamaz.

5. Bölünebilirlik Varsayımı

Bu varsayım, her karar değişkenlerinin ondalıklı bir sayı alabileceği anlamına gelir. Bu varsayım ortadan kalktığında tamsayılı programlama söz konusu olur.

DP'nin Uygulama Alanları

- Ulaştırma ve dağıtım kanallar
- Beslenme ve karıştırma problemleri
- Üretim planlaması
- Yatırım planlaması
- Görev dağıtımı
- Arazi kullanımı planlaması
- Kuruluş yeri seçimi
- Oyun teorisi
- …

DP Problemlerinin Modelinin Kurulması

DP Problemlerinin modelinin kurulmasında aşağıdaki adımların izlenmesi gerekmektedir.

1. Karar değişkenlerinin tanımlanması ve bunların sembolize edilmesi
2. Amacın belirlenerek amaç fonksiyonun karar değişkenlerinin doğrusal bir fonksiyonu olarak yazılması
3. Tüm kısıtlamaların karar değişkenlerinin doğrusal bir fonksiyonları olarak eşitlik veya eşitsizlik olarak yazılması
4. Negatif olmama koşullarının yazılması.

Örnek DP Modeli-1

- İnci kimya firması X ve Y gibi iki tip kimyasal madde üretmektedir. 1 litre X ürününün maliyeti 160 TL. , 1 litre Y ürününün maliyeti ise 240 TL. dir. Müşteri talebine göre, firma, gelecek hafta için en az 6 litre X ve en az 2 litre Y ürünü üretmelidir. X ve Y kimyasal ürünlerinde kullanılan hammaddelerden birisinin sunumu azdır ve sadece 30 gr. sağlanabilmektedir. X ürününün bir litresinde bu hammaddeden 3 gr. ve Y nin litresinde de 5 gr. gerekli olmaktadır.
- İnci firması, toplam maliyetini minimize etmek için X ve Y ürünlerinden kaçar litre üretmesi gerektiği konusunda çok büyük bir kararsızlık içerisine girmiştir. Bu soruyu yanıtlayacak modeli kurunuz.

Örnek DP Modeli-1-devam

- **Problemde karar değişkenleri,**
- x1 = Üretilecek X ürününün miktarı (litre)
- x2 = Üretilecek Y ürününün miktarı (litre)
- **Minimize edilmek istenen toplam maliyet**
- 160x1 + 240x2 dir.
- **İstenen gerekli minimum miktar ise**
- $x1 \geq 6$ ve $x2 \geq 2$ dir.
- **Hammadde kısıtlayıcısı ise**
- $3x1 + 5x2 \leq 30$ dur.
- **Böylece minimizasyon modeli şöyle olacaktır:**
- Min z = 160x1+240x2
- $x1 \geq 6$
- $x2 \geq 2$
- $3x1+5x2 \leq 30$
- $x1, x2 \geq 0$

Örnek DP Modeli-2

- Mügesüt şirketi kapasite sorunu yüzünden günde 120.000 kg. dan daha çok süt işleyememektedir. Yönetim, yağ veya işlenmiş süt için kullanılan sütün dengelenmesi için peynir fabrikasında en az 10.000 kg. lık günlük süt kullanmak istemektedir. Bir kg. sütün yağ üretimi için kullanıldığında, kara katkısı, 4 TL., şişe sütü olarak kullanıldığında katkısı 8 TL. ve peynir üretimi için kullanıldığında ise katkısı 6 TL. dir.
- Yağ bölümü günde 60.000 kg., süt şişeleme donanımı günde 40.000 kg., peynir donanımı ise günde 30.000 kg. süt işleyebilir.
- Şirket karını maksimize etmek istediğine göre problemi doğrusal programlama modeli olarak ifade ediniz.

Örnek DP Modeli-2-devam

- **Çözüm:**
- **Karar Değişkenleri**
- x1 = Yağ yapımında kullanılan süt miktarı (kg)
- x2 = Şişelemede kullanılan süt miktarı (kg)
- x3 = Peynir yapımında kullanılan süt miktarı (kg)
- **İşletmenin karını maksimize edecek amaç fonksiyonu;**
- Maksimum $z = 4x1 + 8x2 + 6x3$
- **Kısıtlar ise;**
- $x3 \geq 10.000$
- $x1 \leq 60.000$
- $x2 \leq 40.000$
- $x3 \leq 30.000$
- $x1 + x2 + x3 \leq 120.000$
- **Negatif Olmama koşulu;**
- $x1, x2, x3 \geq 0$

Ulaştırma Problemi Örnek DP Modeli-3

- Üç ayrı fabrikada beyaz eşya üreten bir işletme satışlarını değişik bölgelerdeki üç depo aracılığıyla yapmaktadır. İşletme yönetiminin temel sorunu beyaz eşyanın fabrikalardan satış depolarına ulaştırılmasında karşılaştığı yüksek ulaştırma giderleridir. Fabrikalardan depolara birim ulaştırma maliyetleri aşağıda verilmiştir.

Fabrika	Depo		
	A	B	C
1	30	25	15
2	16	45	29
3	25	10	16

- Üretim miktarları sırasıyla 150, 200 ve 400 adettir. Depoların aylık istemleri A için 220, B için 150, C için 380 adettir. Depoların gereksinimini tam olarak sağlamak isteyen işletme, tüm üretimini toplam ulaştırma maliyetini en küçük yapacak şekilde dağıtmak istemektedir. Problemin doğrusal programlama modelini kurunuz.

Örnek DP Modeli-3-devam

İlk olarak karar değişkenlerini, i'inci fabrikadan j'inci depoya taşınan beyaz eşya miktarı (adet olarak) olmak üzere xij (i = 1, 2, 3; j = A, B, C) şeklinde tanımlayalım. Buna göre, karar değişkenleri aşağıdaki gibi olur.

x_{1A} = 1 nolu fabrikadan A deposuna gönderilen beyaz eşya sayısı

x_{1B} = 1 nolu fabrikadan B deposuna gönderilen beyaz eşya sayısı

....

x_{3C} = 3 nolu fabrikadan C deposuna gönderilen beyaz eşya sayısı

İşletmenin amacı aylık taşıma maliyetleri toplamını en küçükleyen değişken değerlerini belirlemek olduğuna göre, amaç fonksiyonu aşağıdaki gibi yazılır.

$Z_{enk} = 30x_{1A} + 25x_{1B} + 15x_{1C} + 16x_{2A} + 45x_{2B} + 29x_{2C} + 25x_{3A} + 10x_{3B} + 16x_{3C}$

Problemin kısıtlayıcıları, fabrikaların üretim miktarları ile depoların gereksinim miktarlarıdır.

Herhangi bir fabrikadan üretiminden fazla taşıma yapılamayacağından ve üretimin tamamı dağıtılmak istendiğinden,

$x_{1A} + x_{1B} + x_{1C} = 150$

$x_{2A} + x_{2B} + x_{2C} = 200$

$x_{3A} + x_{3B} + x_{3C} = 400$

olur.

Örnek DP Modeli-3-devam

- Bunlar üretim miktarı ile ilgili kısıtlayıcı fonksiyonlardır.
- Depoların beyaz eşya gereksiniminin eksiksiz karşılanması koşulu aşağıdaki eşitlikler sistemiyle açıklanabilir.

$x_{1A} + x_{2A} + x_{3A} = 220$

$x_{1B} + x_{2B} + x_{3B} = 150$

$x_{1C} + x_{2C} + x_{3C} = 380$

- Negatif taşıma olamayacağına göre,
- $x_{i,j} \geq 0 \qquad (i = 1, 2, 3; \quad j = A, B, C)$

negatif olmama koşulunun yazılmasıyla model kurulmuş olur.

Beslenme Problemi Örnek DP Modeli 4

Bir çiftçi çiftliğindeki tavukların günlük karbonhidrat, protein ve vitamin gereksinimini en küçük maliyetle karşılamak amacıyla en uygun besin maddelerini ve bunların miktarlarını belirlemek istemektedir. Alternatif besin maddelerinin birim maliyetleri, içerdikleri karbonhidrat, protein ve vitamin miktarları ile bunlara olan günlük gereksinim aşağıdaki tabloda özetlenmiştir.

Bu verilere göre, tavukların günlük besin gereksinimini tam olarak karşılayan en küçük maliyetli besin karışımının belirlenmesinde kullanılacak doğrusal programlama modelini kurunuz.

Besin Elemanı	Besin Türü (kg)			En Az Günlük Gereksinim
	Suni Yem	Buğday	Arpa	
Karbonhidrat (gr)	9	2	4	20
Protein (gr)	3	8	6	18
Vitamin (mgr)	1	2	6	15
Birim Fiyat (TL)	7	6	5	-

Örnek DP Modeli 4-devam

Karışım suni yem, buğday ve arpadan oluştuğundan, karar değişkenleri aşağıdaki gibi tanımlanabilir.

x_1: Suni yem tüketim miktarı (kg/gün)

x_2: Buğday tüketim miktarı (kg/gün)

x_3: Arpa tüketim miktarı (kg/gün)

Toplam maliyet tüketilen her bir besin türünün birim maliyeti ile o besinden tüketilen miktarın çarpımlarının toplamına eşittir. Buna göre toplam maliyet,

$Z = 7x_1 + 6x_2 + 5x_3$

biçiminde yazılır.

Amaç bu toplamı en küçüklemek olduğundan, amaç fonksiyonu amaca uygun olarak aşağıdaki gibi ifade edilir.

$Zenk = 7x_1 + 6x_2 + 5x_3$

Problemin kısıtlayıcı fonksiyonları günlük besin elemanlarına aittir. Kısıtlayıcı koşulların ise sırasıyla karbonhidrat, protein ve vitamin gereksinimlerinin göz önünde bulundurulmasıyla aşağıdaki gibi yazılacakları açıktır.

$9x_1 + 2x_2 + 4x_3 \geq 20$ (Karbonhidrat kısıtı)

$3x_1 + 8x_2 + 6x_3 \geq 18$ (Protein kısıtı)

$1x_1 + 2x_2 + 6x_3 \geq 15$ (Vitamin kısıtı)

$\geq$ işareti alınması gereken besin elemanlarının belirtilen miktarların altına düşmeyeceğini, fakat bu miktarlardan fazla olabileceğini belitmektedir.

Negatif tüketim olamayacağından,

$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0$

yazılmasıyla modelleme işlemi tamamlanmış olur.

Üretim Planlaması Örnek DP Modeli 5

- Bereket AŞ düşük ve yüksek fosfatlı olmak üzere iki çeşit gübre üretmektedir. Gübreler üç farklı hammaddenin (A, B, C) karışımından oluşmaktadır. 1 ton yüksek fosfatlı gübre üretiminde 2 ton A, 1'er ton B ve C; 1 ton düşük fosfatlı gübre üretiminde ise A ve B'den 1'er ton kullanılmaktadır. İşletmenin aylık hammadde kapasitesi 150 ton A, 120 ton B, 50 ton C'dir. Düşük fosfatlı gübre isteminin en çok 20 ton/ay olduğu bilinmektedir. Yüksek fosfatlı gübrenin satış fiyatı 150 TL/ton, düşük fosfatlı gübrenin satış fiyatı ise 100 TL/ton dur. İşletme, toplam satış gelirini en büyüklemek için her ay her bir üründen kaç birim üretmelidir? Problemi doğrusal programlama olarak modelleyiniz.

Örnek DP Modeli 5-devam

Düşük ve yüksek fosfatlı gübre miktarlarının belirlenmesi gerekmektedir. Dolayısıyla, model değişkenleri aşağıdaki gibi tanımlanmalıdır.

x_1: Yüksek fosfatlı gübre üretim miktarı (ton/ay)

x_2: Düşük fosfatlı gübre üretim miktarı (ton/ay)

Amaç toplam aylık satış gelirini en büyüklemek olduğuna göre, amaç fonksiyonu aşağıdaki gibi olur.

$Zenb = 150x_1 + 100x_2$

Problemin kısıtlayıcı elemanları her iki gübre için gerekli ve sınırlı olan hammadde miktarları ile düşük fosfatlı gübreye olan istem miktarıdır. Buna göre, kısıtlayıcı fonksiyonlar aşağıdaki gibi olur.

$2x_1 + 1x_2 \leq 150$ (A hammaddesi kısıtı)

$1x_1 + 1x_2 \leq 120$ (B hammaddesi kısıtı)

$1x_1 + 0x_2 \leq 50$ (C hammaddesi kısıtı)

$1x_1 \leq 20$ (Düşük fosfatlı gübre istem miktarı kısıtı)

Son olarak, üretim miktarı negatif olamayacağından, $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$ yazılmasıyla model tamamlanmış olur.

Örnek DP Modeli 6

- Biri alüminyum diğeri ahşap çerçeveli olmak üzere iki tip pencere üretimi planlanmaktadır. Üretim atölyelerinin günlük çalışma kapasiteleri ve her üründen bir adet üretmek için gerekli zaman (saat olarak) aşağıdaki gibidir. Ahşap çerçeveli pencerenin kâra katkısı 300 TL, alüminyum çerçevelininki ise 500 TL'dir. İşletme, günlük karını en büyüklemek için her üründen kaç birim üreteceğini belirlemek istediğine göre, problemi doğrusal programlama modeli olarak formüle ediniz.

Atölye	Pencere		Çalışma Kapasitesi (gün/saat)
	Alüminyum	Ahşap	
Alüminyum	1	0	4
Ahşap	0	2	12
Cam Üretim	3	2	18
Birim Kâr (TL)	300	500	-

Örnek DP Modeli 6-devam

Problemin karar değişkenleri aşağıdaki gibi tanımlanabilir.

x_1: Ahşap çerçeveli pencere üretim miktarı (adet/gün)
x_2: Alüminyum çerçeveli pencere üretim miktarı (adet/gün)

Amaç, günlük toplam kârı en büyükleyecek x_1, x_2 değerlerini belirlemek olduğuna göre, amaç fonksiyonu aşağıdaki gibi yazılır.

$$Z_{enb} = 300x_1 + 500x_2$$

İşletmenin her iki ürünün üretimi için gerekli ve sınırlı olan kaynakları atölyelerinin günlük çalışma kapasiteleridir.

Buna göre kısıtlayıcı fonksiyonlar aşağıdaki gibi olur.

$x_1 + 0x_2 \leq 4$ (Alüminyum kaplama atölyesi çalışma zamanı kısıtı)
$0x_1 + 2x_2 \leq 12$ (Ahşap kaplama atölyesi çalışma zamanı kısıtı)
$3x_1 + 2x_2 \leq 18$ (Cam üretme atölyesi çalışma zamanı kısıtı)

Negatif üretim olamayacağına göre, $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$ yazılmasıyla model tamamlanır.

Örnek DP Model 7

- Hazır gıda AŞ kg' ı 0.85 TL' den 120000 kg domates alarak domates suyu ve domates salçası üretmektedir. Konserve edilen ürünler 12 kutuluk koliler halinde paketlenmektedir. Bir kutu domates suyu için 0.75 kg, 1 kutu salça için 1 kg domates kullanılmaktadır. Şirketin pazar payı 2500 koli domates suyu, 7500 koli domates salçası olarak belirlenmiştir. Bir koli domates suyunun satış fiyatı 36 TL, bir koli salçanın satış fiyatı 18 TL dir. Toplam satış gelirinin en büyük olmasını isteyen işletmenin üretim planını belirleyiniz.

Örnek DP Model 7-devam

Üretim domates suyu ve salçadan oluştuğundan, modelin değişkenleri şöyle tanımlanır.

x_1: Domates suyu kolisi miktarı (adet)
x_2: Domates salçası kolisi miktarı (adet)

Toplam satış gelirinin en büyük olması amaçlandığından, amaç fonksiyonu aşağıdaki gibi olur.

$Z_{enb} = 36x_1 + 18x_2$

Üretimin planlanmasında, satın alınan domates miktarı ile ürünlerin pazar payları göz önünde bulundurulması gerektiğinden, kısıtlayıcı fonksiyonlar şöyle olur.

$9x_1 + 12x_2 \leq 120000$ (Domates miktarı kısıtı)
$x_1 \leq 2500$ (Domates suyu pazar payı kısıtı)
$x_2 \leq 7500$ (Salça pazar payı kısıtı)
$x_1, x_2 \geq 0$ (Negatif olmama koşulu)

Yatırım Planlaması Örnek DP Modeli 8

Cihan Bey 60 milyon TL tutarındaki emekli ikramiyesi ile yıllık gelirini en büyük yapacak yatırımlara girmeyi planlamaktadır. Cihan Bey için uygun yatırım seçenekleri ile bu yatırımların yıllık getiri oranları aşağıda verilmiştir. Cihan Bey'in amacı, yıllık getirisi en büyük olan yatırım planını belirlemektir. Cihan Bey karşılaşabileceği risklere karşın aşağıdaki prensip kararlarını almıştır.

a. Banka mevduatı, devlet tahvili ile altına yatırımların toplamına eşit olmalıdır.

b. Altına yatırım, nakit olarak saklanan paranın %30'undan fazla olmamalıdır.

c. Hisse senedi yatırımı 15 milyon TL'yi geçmemelidir.

d. Devlet tahvili yatırımı en fazla 10 milyon TL olmalıdır.

Yatırım Seçeneği (Milyon TL)	Getiri Oranı (%)
Banka Mevduatı	52
Hisse Senedi	40
Devlet Tahvili	32
Altın	16
Nakit	-5

Örnek DP Modeli 8-devam

Modelin değişkenleri j yatırım seçeneğine ayrılan para miktarı (milyon TL) olarak aşağıdaki gibi tanımlanır.

x_1: Banka mevduatı yatırım miktarı
x_2: Hisse senedi yatırım miktarı
x_3: Devlet tahvili yatırım miktarı
x_4: Altına yatırım miktarı
x_5: Nakit olarak ayrılan para miktarı

Cihan Bey'in amacı yıllık getirisini en büyük yapacak yatırım miktarlarını belirlemek olduğuna göre, problemin amaç fonksiyonu şöyle olacaktır.

$Z_{enb} = 0.52x_1 + 0.40x_2 + 0.32x_3 + 0.16x_4 - 0.05x_5$

Karar değişkenlerinin değerleri milyon TL olarak ifade edildiğinden, amaç fonksiyo-nunun değeri de milyon TL olacaktır.

Modelin kısıtlayıcı fonksiyonları, Cihan Bey'in prensip kararları doğrultusunda, aşağıdaki gibi belirlenecektir.

a. Banka mevduatı (x_1), devlet tahvili (x_3) ile altına (x_4) yatırımların toplamına eşit olmalıdır. Buna göre,

$x_1 = x_3 + x_4$

yazılabilir. Doğrusal programlamadaki kısıtlayıcı fonksiyonların sağ taraflarında bir sabit olması gerektiği bilinmektedir. Bu koşulu sağlamak için, eşitliğin sağ tarafı sol taraftan çıkartılır. Bu yolla söz konusu kısıt doğru formda aşağıdaki gibi olur.

$x_1 - (x_3 + x_4) = 0$ veya $x_1 - x_3 - x_4 = 0$

b. Nakit olarak ayrılan paranın x_5 olduğu düşünülürse, altına yapılan yatırıma ilişkin kısıtlayıcı aşağıdaki gibi formüllenir.

$x_4 \leq 0.30x_5$ veya $x_4 - 0.30x_5 \leq 0$

c. $x_2 \leq 15$ (Hisse senedi yatırımı)

d. $x_3 \leq 10$ (Devlet tahvili yatırımı)

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 60$ (Paranın tamamının değerlendirilmesi kısıtı)

$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, x_5 \geq 0$ yazılmasıyla model kurulmuş olur.

Ödev

Gülüm AŞ kuru ciltlerin bakımı için KUR, yağlı ciltlerin bakımı için YAĞ ve normal ciltlerin bakımı için NOR marka krem üretmeyi planlamaktadır. Ürünlerin satışa hazır duruma gelmesi için dört ayrı işlem biriminde işlem görmesi gerekmektedir. İşletmenin işlem birimlerinin haftalık çalışma kapasiteleri (saat/hafta olarak) ve her ürünün 10 adetinin gerektirdiği işlem süreleri aşağıdaki gibidir.

Krem	İşlem Birimi			
	I	II	III	IV
KUR	3	2	1	-
YAĞ	4	2	3	1
NOR	6	8	1	3
Kapasite	80	40	25	35

İşletmenin elinde üç ürünün her birinden 300'er şişe üretecek hammaddesi bulunmasına karşın elindeki şişe adeti toplamı 850'dir. Diğer taraftan, yapılan pazar araştırmaları KUR marka kremin haftalık üretim miktarının en fazla 250 şişe, NOR marka kremin ise en az 250 şişe olması gerektiğini ortaya çıkarmıştır. KUR marka kremin şişesinden 75 TL, YAĞ marka kremin şişesinden 90 TL, NOR marka kremin şişesinden 60 TL kâr elde edilmektedir. İşletmenin kârını en büyükleyecek üretim planının belirlenmesinde kullanılacak doğrusal programlama modelini kurunuz.

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

DOĞRUSAL PROGRAMLAMA
GRAFİK ÇÖZÜM YÖNTEMİ

Prof.Dr. Ünal H. ÖZDEN

Temel Kavramlar

- ***Çözüm***: Bir doğrusal programlama probleminin kısıtlayıcı fonksiyonlarının hepsini birden sağlayan karar değişkenlerinin (x_1, x_2, ..., x_n) oluşturduğu kümeye *çözüm* denir.
- ***Uygun çözüm***: Negatif olmama koşulunu sağlayan çözüme *uygun çözüm* denir.
- ***En iyi çözüm***: Amaç fonksiyonuna en iyi değeri (en küçük veya en büyük) sağlayan uygun çözüme *en iyi çözüm* denir.

Grafik Çözüm Yönteminin Aşamaları

- Bir doğrusal programlama probleminin grafik çözümünde aşağıdaki adımlar izlenir:

1. Değişkenlerin koordinat sisteminin yatay ve dikey eksenlerine yerleştirilmesi,
2. Kısıtlayıcı fonksiyonların grafiğinin çizilmesi,
3. Uygun çözüm bölgesinin belirlenmesi,
4. En iyi çözümün araştırılması.

Örnek 1

Amaç fonksiyonu:

$Z_{enb} = 6x_1 + 8x_2$

Kısıtlayıcı fonksiyonları:

$$
\begin{array}{lll}
7x_1 + 3x_2 \leq 21 & & (1) \\
6x_1 + 7x_2 \leq 42 & & (2) \\
x_1 \qquad\quad\;\; \leq 3 & & (3) \\
\qquad\quad\; x_2 \leq 4 & & (4)
\end{array}
$$

Negatif olmama koşulu:

$x_1, x_2 \geq 0$

olarak verilen doğrusal programlama problemininin en iyi çözümünü grafik çözüm yöntemiyle bulunz.

Örnek 1-devam

x_1 değişkenini yatay, x_2 değişkenini dikey eksen üzerinde gösterelim. Negatif olmama ($x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$) koşulundan dolayı uygun çözümler x_1x_2 düzleminin birinci bölgesinde bulunacaktır. Kısıtlayıcı fonksiyonların oluşturduğu sınır, bu bölgeyi ($x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$) iki kısma ayırır. Bölgelerden biri negatitif olmama koşulu dahil tüm kısıtlayıcıları sağlarken, diğeri yalnızca negatif olmama koşulunu sağlayan noktalardan oluşur.

Çözüm bölgesini belirlemek için kısıtlayıcı fonksiyonları sırasıyla ele alalım ve kendilerine karşılık gelen doğruların x ve y eksenlerini kestikleri noktaların koordinatlarını belirleyelim.

Koordinat belirleme ilgili tüm işlemler aşağıda verilmiştir.

(1) $7x_1 + 3x_2 = 21$ eşitliğinde,

$x_1 = 0$ için $x_2 = 7$, $x_2 = 0$ için $x_1 = 3$

olur.

(2) $6x_1 + 7x_2 = 42$ eşitliğinde,

$x_1 = 0$ için $x_2 = 6$, $x_2 = 0$ için $x_1 = 8$

olur.

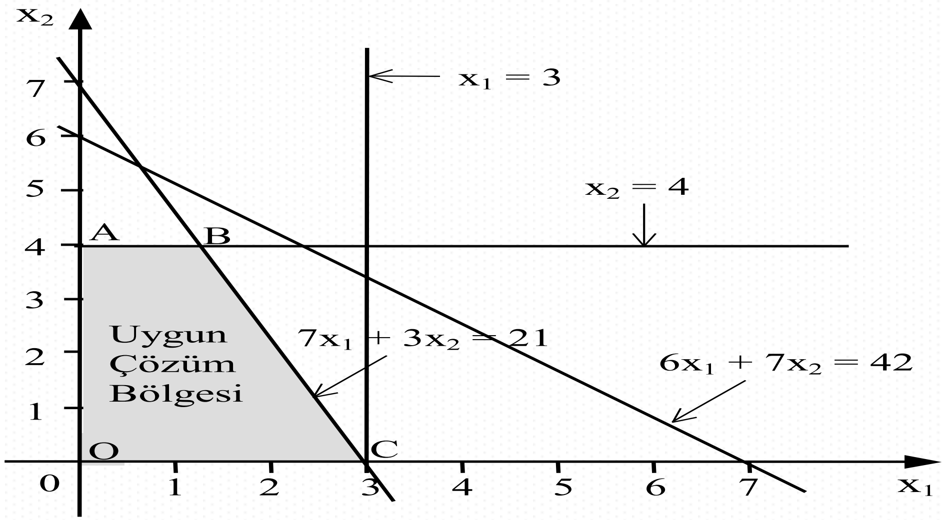
(3) $x_1 = 3$ eşitliği, yatay ekseni (3, 0) noktasında kesen ve dikey eksene paralel olan bir doğru tanımlar.

(4) $x_2 = 4$ eşitliği, dikey ekseni (0, 4) noktasında kesen ve yatay eksene paralel doğru denklemidir.

Örnek 1-devam

Bu belirlemelerden sonra kısıtlayıcı fonksiyonlarla ilgili doğruları çizebiliriz.

Sayıları dört olan kısıtlayıcı fonksiyonların her biri için bir doğru çizilmesi ve eşitsizliklerin yönlerinin dikkate alınmasıyla uygun çözüm bölgesi Şekil 3.5'deki taralı alan olarak belirir.



Şekil 3.5
Örnek 3.5'in Gösterimi

Şekil 3.5'deki taralı alanın içindeki (koyu renk çizilmiş sınırları dahil) tüm noktalar kısıtlayıcıları aynı anda sağladığından, OABC dörtgeni uygun çözüm bölgesidir. Bu alan içindeki sınırsız sayıdaki noktaların her biri uygun çözüm olarak nitelendirilir.

Şekilden görüldüğü gibi $6x_1 + 7x_2 \leq 42$ kısıtı olsa da olmasa da uygun çözüm bölgesi OABC alanı olacaktır. Çözüm bölgesini etkilemeksizin modelden çıkartılabilen bu tür kısıtlayıcılara *gereksiz* (*fazlalık*) *kısıtlayıcılar* denir. $x_1 \leq 3$ kısıtının da gereksiz olduğu görülebilir.

Taralı alanın içinde ve sınırları üzerindeki tüm noktalar bütün kısıtlayıcı fonksiyonları (negatif olmama koşulu dahil) sağladığından uygun çözüm bölgesi bir konveks (dış bükey) alan olarak ortaya çıkar. Geometrik olarak *konveks alan* kenarlarında çukurlaşmalar olmayan ve içinde delikler bulunmayan bir alandır. Bu alanın A, B gibi herhangi iki noktası göz önüne alındığında AB doğru parçasının tamamı alan içinde kalır.

Örnek 3

Aşağıdaki doğrusal programlama problemini grafik yöntemiyle çözünüz.

$$Z_{enb} = x_1 + 3x_2$$

$$x_1 + x_2 \le 8$$

$$x_1 + 2x_2 \ge 8$$

$$x_2 \ge 3$$

$$x_1, x_2 \ge 0$$

Örnek 3-devam

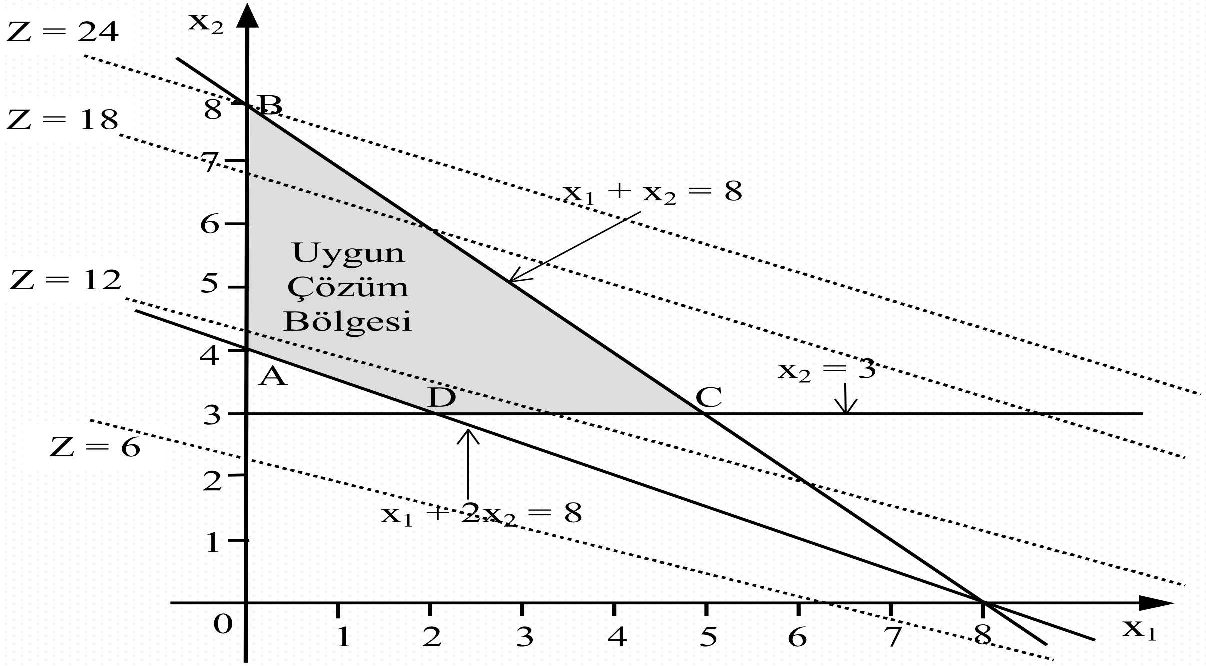
Doğruların çizilmesiyle ilgili aritmetik işlemler aşağıda topluca gösterilmiştir.

$x_1 + x_2 = 8$ eşitliğinde $x_1 = 0$ için $x_2 = 8$, $x_2 = 0$ için $x_1 = 8$ bulunur.
$x_1 + 2x_2 = 8$ eşitliğinde $x_1 = 0$ için $x_2 = 4$, $x_2 = 0$ için $x_1 = 8$ bulunur.

Şekilden görüldüğü gibi, uygun çözüm bölgesi ABCD konveks kümesidir.

Bu bölgenin uç noktalarından en az bir tanesi amaç fonksiyonu değerini en büyükleyecektir.

$Z = 6$, $Z = 12$ ve $Z = 18$ eş kâr doğruları Şekil 3.9'da kesikli çizgi ile gösterilmişlerdir. $Z = 18$ için çizilen eş kâr doğrusu incelendiğinde, bu doğrunun yukarısında tek bir uç noktanın (B) bulunduğu görülebilir. Bu durumda problemin en iyi çözümünün bu noktada ortaya çıkacağını söylemek kehanet olmaz.



Şekil 3.9

Örnek 3.8'in Uygun Çözüm Bölgesi ve Eş Kâr Doğruları

Örnek 3-devam

Görüldüğü gibi, B amaç fonksiyonuna en büyük değeri sağlamaktadır. B'nin koordinatlarının $x_1 = 0$, $x_2 = 8$ olduğu göz önünde bulundurulduğunda $Z_B(Z_{enb})$ aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$Z_B = Z_{enb} = 0 + 3(8) = 24$$

Özetle, karar değişkenlerinin en iyi değerleri $x_1 = 0$, $x_2 = 8$ ve amaç fonksiyonunun en büyük değeri 24 olarak belirlenmiştir.

Uç noktaların koordinatlarının ayrı ayrı hesaplanıp amaç fonksiyonuna yerleştirilmesiyle hesaplanan Z değerleri aşağıda verilmiştir.

Bu hesaplamalar da amaç fonksiyonunun en büyük değerine B(0, 8) noktasında ulaştığını göstermektedir.

$$Z_A = Z_{(0,\,4)} = 1(0) + 3(4) = 12$$

$$Z_B = Z_{(0,\,8)} = 1(0) + 3(8) = 24$$

$$Z_C = Z_{(5,\,3)} = 1(5) + 3(3) = 14$$

$$Z_D = Z_{(2,\,3)} = 1(2) + 3(3) = 11$$

Örnek 4

Aşağıdaki doğrusal programlama problemini grafik yöntemiyle çözünüz

$$Z_{enk} = 3x_1 + 5x_2$$

$$3x_1 + x_2 \geq 9$$

$$x_1 + 2x_2 \geq 8$$

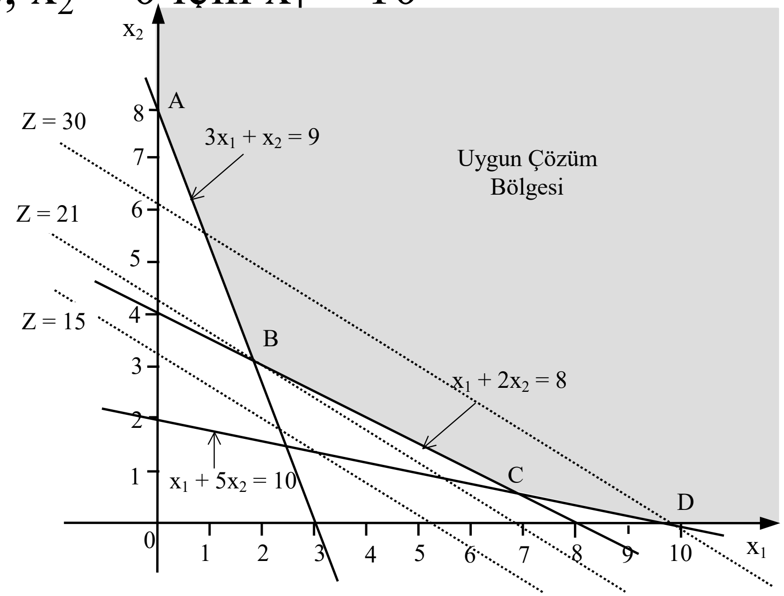
$$x_1 + 5x_2 \geq 10$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Örnek 4-devam

Doğruların çizilmesiyle ilgili aritmetik işlemler aşağıda topluca gösterilmiştir.

- $3x_1 + x_2 = 9$ eşitliğinde $x_1 = 0$ için $x_2 = 9$, $x_2 = 0$ için $x_1 = 3$,
- $x_1 + 2x_2 = 8$ eşitliğinde $x_1 = 0$ için $x_2 = 4$, $x_2 = 0$ için $x_1 = 8$,
- $x_1 + 5x_2 = 10$ eşitliğinde $x_1 = 0$ için $x_2 = 2$, $x_2 = 0$ için $x_1 = 10$



- $Z_A = Z_{(0,\ 9)} = 3(0) + 5(9) = 45$
- $Z_{enk} = Z_B = Z_{(2,\ 3)} = 3(2) + 5(3) = 21^*$
- $Z_C = Z_{(20/3,\ 2/3)} = 3(20/3) + 5(2/3) = 23.3$
- $Z_D = Z_{(10,\ 0)} = 3(10) + 5(0) = 30$

Örnek 5

- Aşağıdaki doğrusal programlama problemini grafik yöntemiyle çözünüz.

$$Z_{enk} = 2x_1 + 3x_2$$

$$3x_1 + 2x_2 \geq 6$$

$$x_1 - 2x_2 \leq 4$$

$$x_1 \leq 5$$

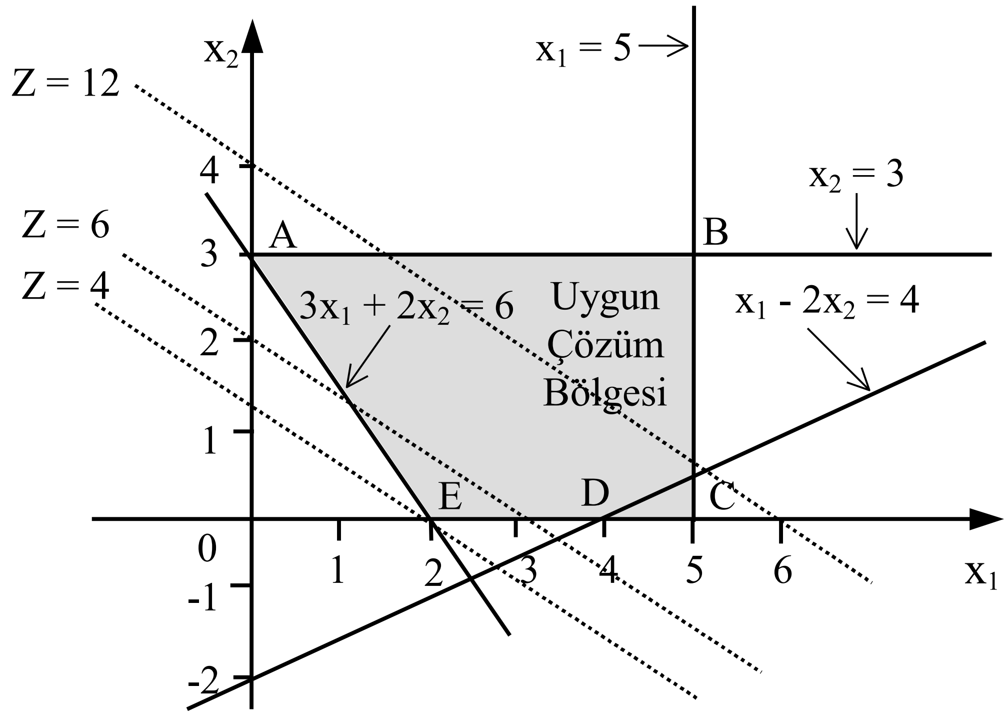
$$x_2 \leq 3$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Örnek 5-devam

- Uç noktaların koordinatlarının ayrı ayrı hesaplanıp amaç fonksiyonunda yerine konulmasıyla ulaşılan değerler de (aşağıda topluca verilmiştir) E noktasının en iyi çözümü sağlayan nokta olduğunu göstermektedir.

- $Z_A = Z_{(0,\ 3)} = 2(0) + 3(3) = 9$
- $Z_B = Z_{(5,\ 3)} = 2(5) + 3(3) = 19$
- $Z_C = Z_{(5,\ 0{,}5)} = 2(5) + 3(0.5) = 11.5$
- $Z_D = Z_{(4,\ 0)} = 2(4) + 3(0) = 8$
- $Z_E = Z_{(2,\ 0)} = 2(2) + 3(0) = 4$



Grafik Çözümde Karşılaşılan Özel Durumlar

1. Eşitsizliklerin Tutarsız Olması
2. Sınırsız Çözüm
3. Uygun Çözüm Bölgesinin Bir nokta Olması
4. Alternatif Eniyi Çözümün Bulunması

1. Eşitsizliklerin Tutarsız Olması

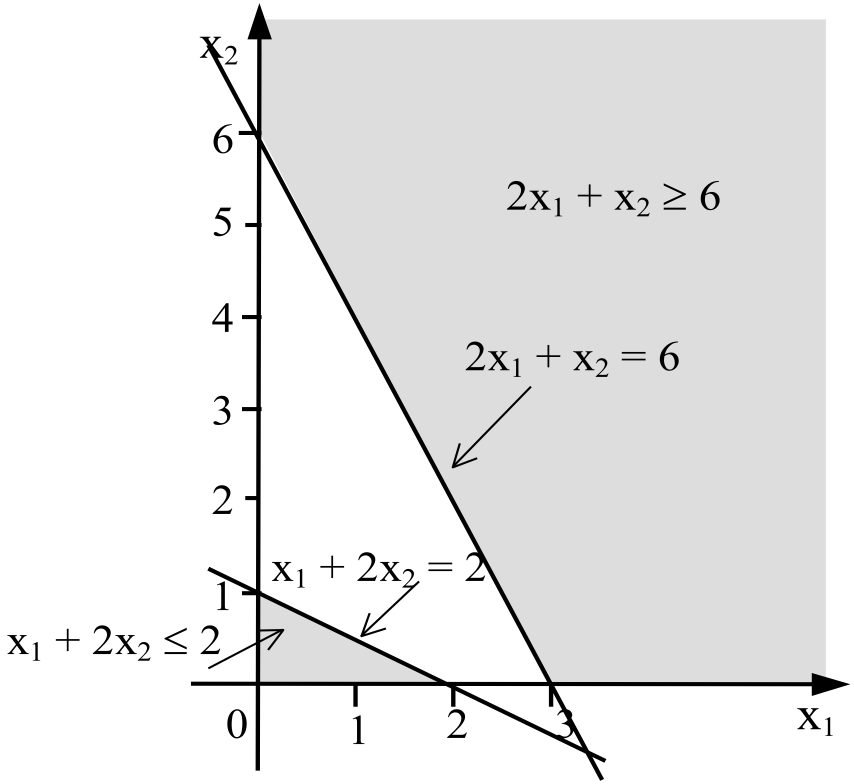
- Aşağıdaki doğrusal programlama problemini grafik yöntemiyle çözünüz.

$$Z_{enb} = 6x_1 + 3x_2$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 2$$

$$2x_1 + x_2 \geq 6$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$



1. Eşitsizliklerin Tutarsız Olması-devam

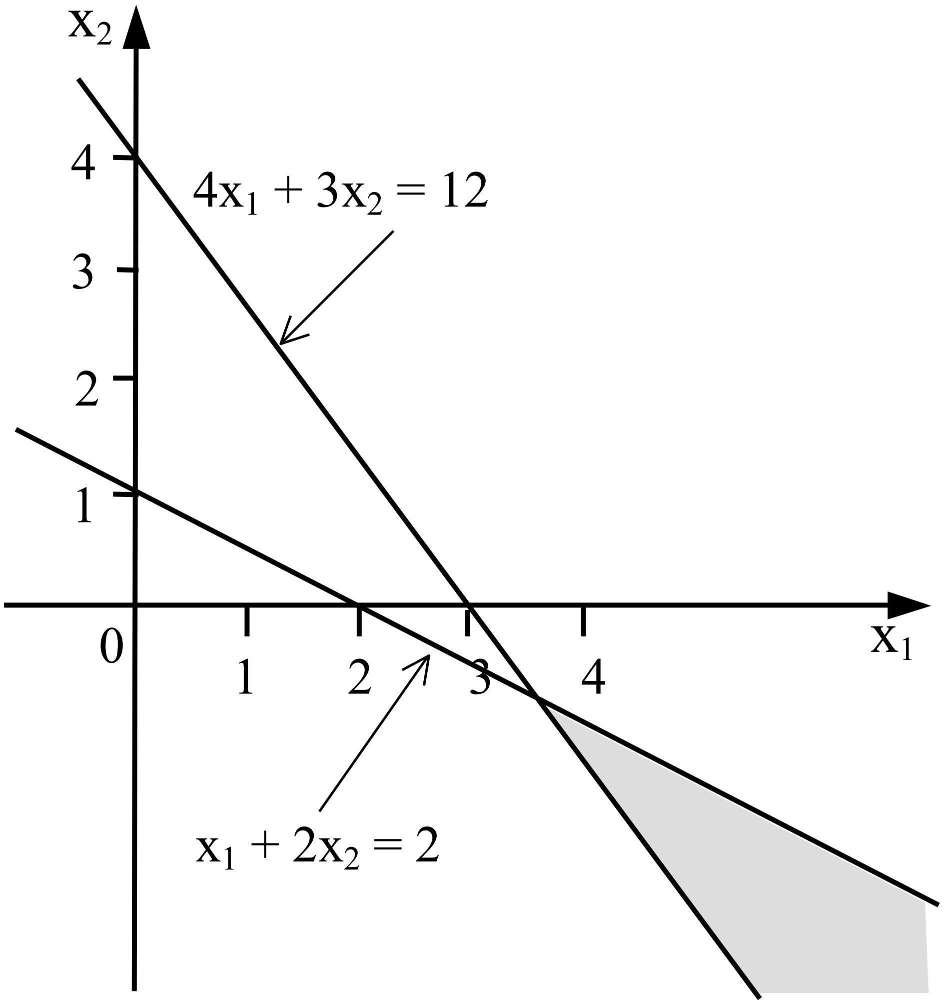
- Aşağıdaki doğrusal programlama problemini grafik yöntemiyle çözünüz.

$$Z_{enb} = 6x_1 + 3x_2$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 2$$

$$4x_1 + 3x_2 \geq 12$$

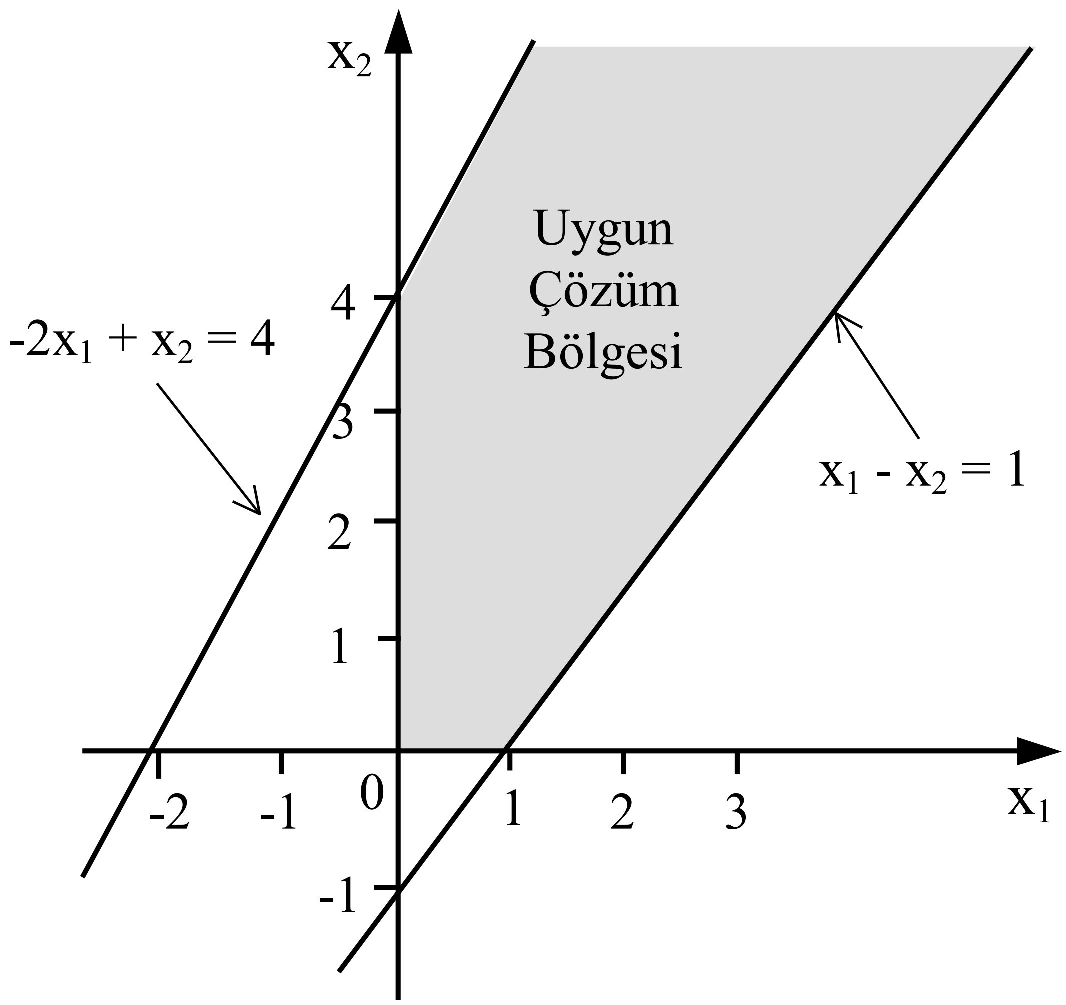
$$x_1, x_2 \geq 0$$



2. Sınırsız Çözüm

- Aşağıdaki doğrusal programlama problemini grafik yöntemiyle çözünüz.

$$Z_{enb} = 2x_1 + x_2$$
$$-2x_1 + x_2 \leq 4$$
$$x_1 - x_2 \leq 1$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$



3. Uygun Çözüm Bölgesinin Bir Nokta Olması

Aşağıdaki doğrusal programlama problemini grafik yöntemiyle çözünüz.

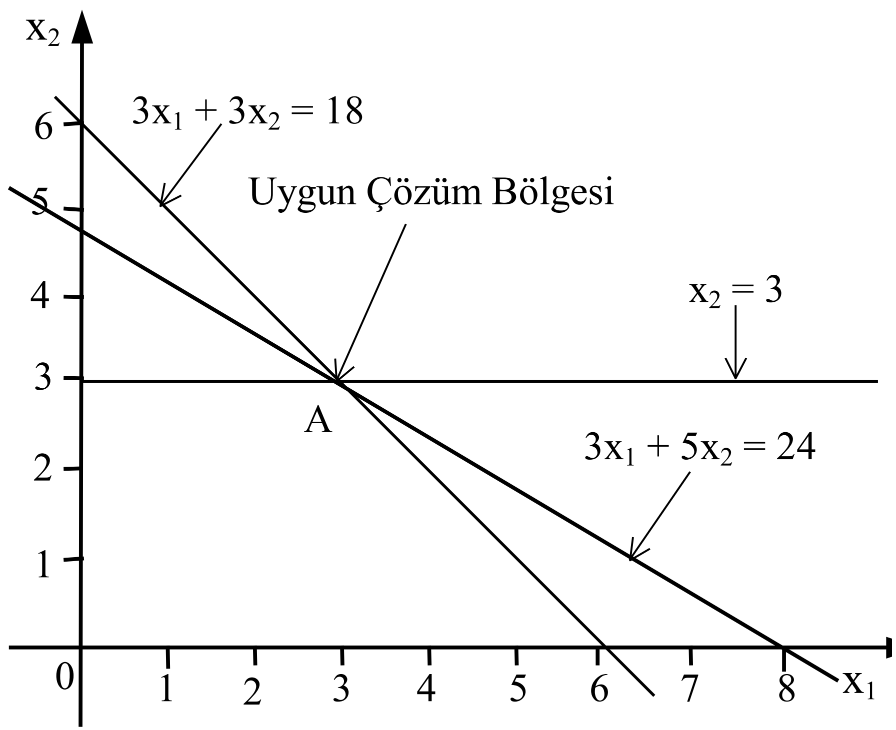
$$Z_{enb} = 6x_1 + 3x_2$$

$$x_1 + x_2 \leq 6$$

$$3x_1 + 5x_2 \geq 24$$

$$x_2 = 3$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$



Üç doğrunun kesiştiği noktanın koordinatlarının belirlenmesi amacıyla bunlardan rasgele seçilen ikisi, $3x_1 + 5x_2 = 24$ ve $x_2 = 3$ olsun.

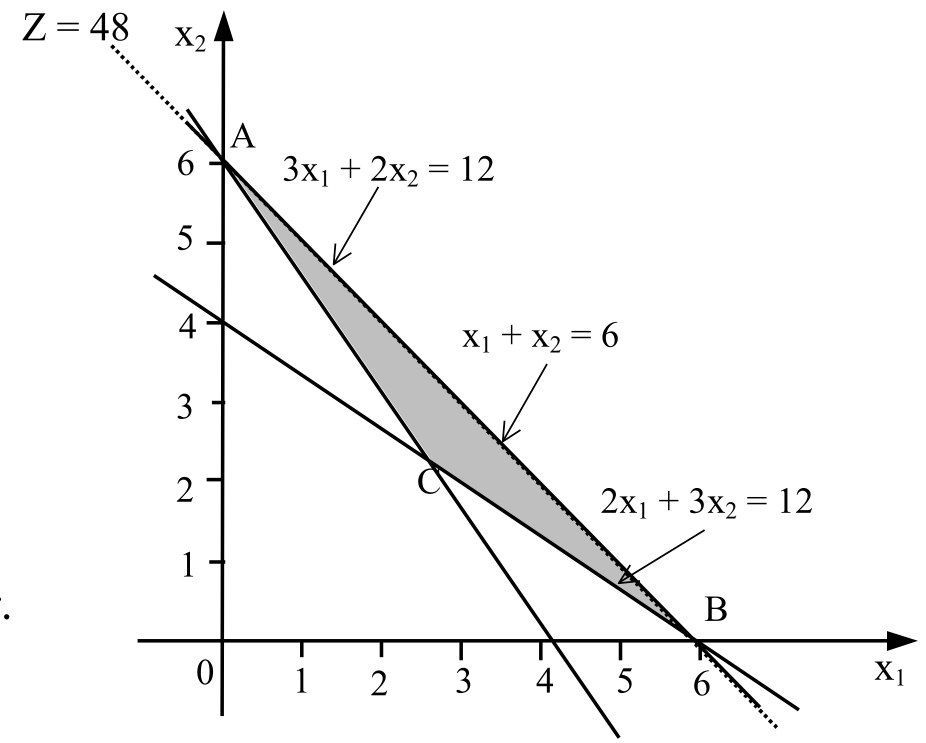
Bu iki denklemin çözümünden $x_1 = 3$, $x_2 = 3$ elde edilir. Buradan amaç fonksiyonunun en büyük değeri, Z'de $x_1 = 3$, $x_2 = 3$ yerleştirilmesiyle,

$Z_{enb} = 6(3) + 3(3) = 27$ olarak hesaplanır.

4. Alternatif Eniyi Çözümün Bulunması

Aşağıdaki doğrusal programlama problemini grafik yöntemiyle çözünüz.

$$Z_{enb} = 8x_1 + 8x_2$$
$$2x_1 + 3x_2 \geq 12$$
$$3x_1 + 2x_2 \geq 12$$
$$x_1 + x_2 \leq 6$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$



Problemin uygun çözüm bölgesi ABC üçgen alanıdır.

Amaç fonksiyonunun ABC üçgeninin uç noktalarındaki değerleri aşağıda verilmiştir.

$$Z_A = Z_{(0,\ 6)} = 8(0) + 8(6) = 48$$
$$Z_B = Z_{(6,\ 0)} = 8(6) + 8(0) = 48$$
$$Z_C = Z_{(12/5,\ 12/5)} = 8(12/5) + 8(12/5) = 192/5$$

Amaç fonksiyonu en büyük değerine A(0, 6) ve B(6, 0) noktalarında ulaşmıştır. Dolayısıyla A ve B noktalarındaki çözümler birbirlerine alternatif olan en iyi çözümlerdir.

Ödev

Aşağıdaki DP problemini grafik çözüm yöntemi ile çözünüz.

$Z_{enb} = 3x_1 + 6x_2$

$$x_1 + x_2 \leq 4$$

$$x_1 + x_2 \leq 1$$

$$x_1 - x_2 \leq -1$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

DOĞRUSAL PROGRAMLAMA
SİMPLEKS ÇÖZÜM YÖNTEMİ

Prof.Dr. Ünal H. ÖZDEN

DP Simpleks Çözüm Yöntemi

- Grafikle çözümün uygulanamadığı çok değişkenli doğrusal programlama problemlerinin çözümünde yaygın biçimde kullanılan yöntem *simpleks yöntemidir*.
- George B. Dantzig tarafından geliştirilen bu yöntem tekrarlı bir yöntem olduğundan *simpleks algoritma* olarak da adlandırılmaktadır.

Kanonik Ve Standart Biçimler

1. ***Kanonik Biçim***

$Z_{enb} = C_1x_1 + C_2x_2 + \ldots + C_nx_n$

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \;+\; \ldots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \;+\; \ldots + a_{2n}x_n \leq b_2 \\ \quad . \qquad . \qquad \ldots \qquad . \qquad . \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots \;+ a_{mn}x_n \leq b_m \\ \qquad x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ \ldots,\ x_n \geq 0 \end{array}$$

olarak formüle edilen doğrusal programlama aşağıdaki özelliklere sahipse, *kanonik* biçimde olduğu söylenir.

1. Tüm karar değişkenleri negatif değildir.
2. Amaç fonksiyonu en büyükleme tipindedir.
3. Tüm kısıtlayıcı fonksiyonlar (≤) işaretlidir.

2. ***Standart Biçim***

$Z_{enk/enb} = C_1x_1 + C_2x_2 + \ldots + C_nx_n$

- $$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \;+\; \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \;+\; \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad . \qquad . \qquad \ldots \qquad . \qquad . \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \\ \qquad x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ \ldots,\ x_n \geq 0 \end{array}$$

olarak formüle edilen doğrusal programlama modeli aşağıdaki özelliklere sahipse, *standart* biçimde olduğu söylenir.

1. Tüm karar değişkenleri negatif değildir.
2. Amaç fonksiyonu en büyükleme veya en küçükleme tipindedir.
3. Tüm kısıtlayıcı fonksiyonlar (negatif olmama koşulu dışında) = işaretlidir.
4. Kısıtlayıcı fonksiyonların sağ taraf sabitleri negatif değildir.

Standart ve Kanonik Biçim Dönüştürme İşlemleri

- ***1.En iyilemenin anlamını değiştirme***
- $Z_{enb} = C_1x_1 + C_2x_2 + ... + C_nx_n$ olarak tanımlanmışken,
- $= (-Z_{enb}) = -C_1x_1 - C_2x_2 - ... - C_nx_n$
- veya
- $Z_{enk} = C_1x_1 + C_2x_2 + ... + C_nx_n$ olarak verilmişken,
- $= (-Z_{enk}) = -C_1x_1 - C_2x_2 - ... - C_nx_n$
- yazılabilir.
- Örnek olması bakımından amaç fonksiyonunun aşağıdaki gibi formüle edildiğini düşünelim.
- $Z_{enk} = 3x_1 - 4x_2 + 2x_3 - 5x_4$
- Amaç fonksiyonundaki tüm terimlerin işaretlerinin değiştirilmesiyle amaç fonksi- yonu aşağıdaki gibi yazılabilir.
- $= (-Z_{enk}) = -3x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 5x_4$
- Dönüştürme işlemi, karar değişkenlerinin en iyi değerlerini değiştirmez. Problemi çözdükten sonra amaç fonksiyonunun en iyi değeri (-1) ile çarpılırsa orijinal problemin Zenk (Zenb) değeri bulunur.

Dönüştürme İşlemleri-devam

•*2*.***Eşitsizliklerin yönünü değiştirme***: Herhangi bir eşitsizliğin her iki tarafı (-1) ile çarpıldığında eşitsizlik yön değiştirir. Sözgelimi, $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \geq b_1$ ile her iki tarafının (-1) ile çarpılmasıyla elde edilen $-a_{11}x_1 - a_{12}x_2 \leq -b_1$ birbirlerine eşittir. Benzer biçimde, $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leq b_1$ yerine $-a_{11}x_1 - a_{12}x_2 \geq -b_1$ yazılabilir.

•*3*.***Eşitliği eşitsizliğe dönüştürme***: Eşitlik biçimindeki bir kısıtlayıcı fonksiyon iki eşitsizlikle açıklanabilir. Örneğin, $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1$ biçimindeki bir fonksiyon yerine, $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \geq b_1$ ve $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leq b_1$ veya $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leq b$ ve $-a_{11}x_1 - a_{12}x_2 \leq -b_1$ yazılabilir.

•*4*.***İşareti sınırlandırılmamış değişkenler***: İşareti sınırlandırılmamış bir değişken (pozitif, negatif veya sıfır) negatif olmayan iki değişken arasındaki fark olarak açıklanabilir. Sözgelimi, x işareti sınırlandırılmamış bir değişken ise, x yerine (x^+-x^-) kullanılabilir. Burada, $x^+ \geq 0$ ve $x^- \geq 0$'dır. Negatif olmayan x^+ ve x^- değişkenlerinden en fazla biri en iyi çözümde pozitif değerli olur.

Dönüştürme İşlemleri-devam

- *5.Eşitsizlik biçimindeki kısıtlayıcı fonksiyonların eşitlik biçimine dönüştürülmesi*: Simpleks yöntem bir eşitlikler sistemine, standart işlemlerin tekrar tekrar uygulanmasıyla çözüm arayan bir süreçtir. Bu nedenle yöntemin en önemli adımı kısıtlayıcı fonksiyonların eşitlik biçiminde yazılmasıdır. Eşitsizlik biçimindeki bir kısıtlayıcının eşitsizliğin yönü bakımından iki türlü olduğu bilinmektedir. Eşitsizlikler

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_{ij} \leq b_i \text{ veya } \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_{ij} \geq b_i \text{ biçimindedir.}$$

(≤) işaretli eşitsizlikleri eşitlik biçimine dönüştürmek için bunların sol taraflarına negatif olmayan birer değişken eklenir. *Aylak değişken* adı verilen bu değişkenler x_{n+1}, x_{n+2}, ..., x_{n+m} ile gösterilir. (≥) işaretli eşitsizlikler ise, sol taraflarından negatif olmayan birer değişken çıkartılmasıyla eşitlik biçimine dönüştürülür. Eşitsizliğin iki tarafı arasındaki farkı gösteren bu değişkene *artık değişken* denir. Bu değişkenler de aylak değişkenler gibi x_{n+1}, x_{n+2} , ..., x_{n+m} sembolleriyle gösterilirler. Yukarıda açıklandığı gibi, negatif olmama koşulu karar değişkenlerinin yanı sıra aylak ve artık değişkenlere de uygulanmaktadır. Bunun nedeni, kısıtlayıcı fonksiyonlardaki (≥) ve (≤) şartlarının gerçekleşmesini sağlamaktır.

Dönüştürme İşlemleri-devam

- ***6. Mutlak değerli kısıtlayıcı fonksiyonların eşitsizlik biçiminde yazılması***: Çok sık olmasa da mutlak değer içeren kısıtlayıcı fonksiyonlara rastlanabilir. Hangi yöntem uygulanırsa uygulansın bu tür kısıtlayıcılarla çözüme ulaşılamaz. Bu yüzden mutlak değerden kurtulmak gerekir. Örnek olması bakımından, kısıtlayıcı fonksiyonun $|a_1x_1 + a_2x_2| \leq b$ şeklinde formüllendiğini düşünelim. Bu durumda yapılması gereken $|a_1x_1 + a_2x_2| \leq b$ yerine $a_1x_1 + a_2x_2 \geq -b$ ve $a_1x_1 + a_2x_2 \leq b$ ikilisini yerleştirmektir. Kısıtlayıcı $|a_1x_1 + a_2x_2| \geq b$ ise $|a_1x_1 + a_2x_2| \geq b$ yerine geçecek eşitsizlikler $a_1x_1 + a_2x_2 \geq b$ ve $a_1x_1 + a_2x_2 \leq -b$ biçimindedir.

  Herhangi bir doğrusal programlama modelinin standart veya kanonik biçimde yazılmasını bir örnek üzerinde açıklayalım.

Örnek 4.1

•

Örnek 4.1: Aşağıdaki gibi verilmiş olan doğrusal programlama problemini, ***a***. Kanonik biçimde, ***b***. Standart biçimde yazınız.

$Z_{enk} = -6x_1 + 7x_2 + 7x_3 - x_4$

$$
\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 - 4x_3 \quad & \geq 30 \\
2x_1 + 9x_2 + 6x_3 + x_4 & \leq 60 \\
6x_1 + x_3 + x_4 & = 15 \\
|3x_1 + 4x_2| \quad & \leq 80
\end{aligned}
$$

$x_1, x_2, x_4 \geq 0$, x_3 sınırlandırılmamış

Çözüm 4.1. a-

- $$Z'_{enb} = 6x_1 - 7x_2 - 7(x_3^+ - x_3^-) + x_4$$

$$\begin{aligned}
-x_1 - 2x_2 + 4(x_3^+ - x_3^-) \quad &\le -30 \\
2x_1 + 9x_2 + 6(x_3^+ - x_3^-) + x_4 &\le 60 \\
6x_1 \qquad + (x_3^+ - x_3^-) + x_4 &\le 15 \\
-6x_1 \qquad - (x_3^+ - x_3^-) - x_4 &\le -15 \\
3x_1 + 4x_2 \qquad &\le 80 \\
-3x_1 - 4x_2 \qquad &\le 80 \\
x_1, x_2, x_3^+, x_3^-, x_4 &\ge 0
\end{aligned}$$

Çözüm 4.1. b-

•

$$Z_{enk} = -6x_1 + 7x_2 + 7(x_3^+ - x_3^-) - x_4$$

$$\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 - 4(x_3^+ - x_3^-) \quad - x_5 \quad &= 30 \\
2x_1 + 9x_2 + 6(x_3^+ - x_3^-) + x_4 \quad + x_6 \quad &= 60 \\
6x_1 \quad + (x_3^+ - x_3^-) + x_4 \quad &= 15 \\
-3x_1 - 4x_2 \quad + x_7 \quad &= 80 \\
3x_1 + 4x_2 \quad + x_8 \quad &= 80
\end{aligned}$$

$$x_1, x_2, , x_4, x_3^+, x_3^-, x_5, x_6, x_7, x_8 \geq 0$$

Simpleks Çözüm Yönteminin Açıklanması

- Aşağıdaki gibi bir modelin olduğunu varsayalım.

$$Z_{enb} = C_1x_1 + C_2x_2 + \ldots + C_nx_n$$

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \leq b_2 \\ \quad . \qquad . \qquad \ldots \qquad . \qquad . \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \leq b_m \end{array}$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ \ldots,\ x_n \geq 0$$

Simpleks Çözüm Yönteminin Açıklanması-devam

- Simpleks yöntemin ilk adımı tüm eşitsizliklerin (negatif olmama koşulu hariç) eşitlik biçimine dönüştürülmesidir. Kesim 4.2'de açıklandığı gibi (≤) işaretli bir eşitsizliği eşitliğe dönüştürmek için eşitsizliğin sol tarafına negatif olmayan bir aylak değişken eklenir. Her bir eşitsizlik için bir aylak değişken kullanılmasıyla yukarıdaki kısıtlayıcı fonksiyonlar aşağıdaki gibi olur.

  $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + 1x_{n+1} + 0x_{n+2} + \ldots + 0x_{n+m} = b_1$
  $a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + 0x_{n+1} + 1x_{n+2} + \ldots + 0x_{n+m} = b_2$
  $. \quad . \quad \ldots \quad . \quad . \quad . \quad \ldots \quad . \quad .$
  $a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n + 0x_{n+1} + 0x_{n+2} + \ldots + 1x_{n+m} = b_m$

  Aylak değişkenlerin eklendikleri kısıtlayıcı fonksiyonlardaki katsayılarının +1, diğerlerinde sıfıra eşit olduğu görülebilir.

  Karar değişkenleri ile aylak değişkenler negatif olmadığından, standart biçimin negatif olmama koşulu aşağıdaki gibi olur.

  $x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{n+m} \geq 0$

  Aylak değişkenlerin amaç fonksiyonu katsayıları, bir başka deyişle bu değişkenlerin amaç fonksiyonuna birim katkıları (birim kârları) sıfırdır
  Bu durumda amaç fonksiyonu aşağıdaki gibi olur.

  $Z_{enb} = C_1x_1 + C_2x_2 + \ldots + C_nx_n + 0x_{n+1} + 0x_{n+2} + \ldots + 0x_{n+m}$

Standart Biçimin Matris Gösterimi

- Standart biçimdeki doğrusal programlama modelinin kısıtlayıcı fonksiyonları matrislerle şöyle gösterilir.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & . & . & . & a_{1n} & 1 & 0 & . & . & . & 0 \\ a_{21} & a_{22} & . & . & . & a_{2n} & 0 & 1 & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{12} & . & . & . & a_{mn} & 0 & 0 & . & . & . & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ x_n \\ x_{n+1} \\ x_{n+2} \\ . \\ . \\ x_{n+m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ b_m \end{bmatrix}$$

Başlangıç Çözüm Tablosu

- Standart biçimin oluşturulmasından sonra en iyi çözümün araştırılması işlemine geçilebilir. Simpleks yöntemin ardışık tekrarları *başlangıç çözüm tablosu* adı verilen bir tablonun düzenlenmesinden sonra başlar. Başlangıç çözüm tablosu, aşağıdaki tablo esasına göre düzenlenir.
-

-

Tablo 4.1
Simpleks Başlangıç Çözüm Tablosu

	2 ↓	3				4				5 ↓
1 →	TDV	x_1	x_2	…	x_n	x_{n+1}	x_{n+2}	…	x_{n+m}	ÇV
	0 x_{n+1}	a_{11}	a_{12}	…	a_{1n}	1	0	…	0	b_1
	0 x_{n+2}	a_{21}	a_{22}	…	a_{2n}	0	1	…	0	b_2
	.	.	.	…	.	.	.	…	.	.
	.	.	.	…	.	.	.	…	.	.
	0 x_{n+m}	a_{m1}	a_{m2}.	…	a_{mn}	0	0	…	1	b_m
6 →	Z_j	0	0	…		0	0	…	0	0
7 →	Z_j - C_j	$-C_1$	$-C_2$	…	$-C_n$	0	0	…	0	-

Tablo 4.1 kapsamındaki bölümler aşağıda açıklanmıştır.

***1. Değişkenler satırı**:* Tablonun ilk satırıdır. Standart biçimin tüm değişkenleri önce karar değişkenleri, sonra diğer değişkenler olmak üzere bu satırda gösterilir.

2. Temel değişkenler sütunu: Tablonun ilk sütunudur. Tablodaki çözüme karşılık gelen temel çözümün değişkenleri ile bu değişkenlerin amaç fonksiyonu katsayılarını gösterir.

- ***3*. *Gövde***: Problemin orijinal karar değişkenlerinin kısıtlayıcı fonksiyonlardaki katsayılarından (a_{ij}, i = 1, 2, ..., m; j = 1, 2, ..., n) oluşan m x n matristir.

4*. *Birim matris: Aylak değişkenlerin kısıtlayıcı fonksiyon katsayılarının oluşturduğu m x m birim matristir.

5*. *Çözüm vektörü: Temeldeki değişkenlerin çözüm değerlerini gösteren m x 1 sütun vektördür. Başlangıçta, kısıtlayıcı fonksiyonların sağ taraf sabitlerinden oluşur.

6*. *Z_j satırı: Yürülükteki temelde bulunan değişkenlerin amaç fonksiyonu katsayıları ile x_j sütunundaki katsayıların karşılıklı çarpımlarının toplamından oluşur. Buna göre örneğin, $Z_1 = 0(a_{11}) + 0(a_{21}) + ... + 0(a_{m1}) = 0$ olur.

3*. *Gövde: Problemin orijinal karar değişkenlerinin kısıtlayıcı fonksiyonlardaki katsayılarından (a_{ij}, i = 1, 2, ..., m; j = 1, 2, ..., n) oluşan m x n matristir.

4*. *Birim matris: Aylak değişkenlerin kısıtlayıcı fonksiyon katsayılarının oluşturduğu m x m birim matristir.

5*. *Çözüm vektörü: Temeldeki değişkenlerin çözüm değerlerini gösteren m x 1 sütun vektördür. Başlangıçta, kısıtlayıcı fonksiyonların sağ taraf sabitlerinden oluşur.

6*. *Z_j satırı: Yürülükteki temelde bulunan değişkenlerin amaç fonksiyonu katsayıları ile x_j sütunundaki katsayıların karşılıklı çarpımlarının toplamından oluşur. Buna göre örneğin, $Z_1 = 0(a_{11}) + 0(a_{21}) + ... + 0(a_{m1}) = 0$ olur.

7*. *Z_j - C_j satırı: Tablonun son satırıdır. Elemanları, Z_j ile o sütunla ilgili değişkenin amaç fonksiyonu katsayısı arasındaki farka eşittir. Z_j - C_j farkları x_j değişkeninin temele alınmasının amaç fonksiyonunda yol açacağı değişikliği ters işaretle gösterir.

•<u>Anahtar Sütun: </u>Simpleks yönteminde, temeli terkeden değişkenin bulunduğu satıra *anahtar satır* denir.

•<u>Anahtar satır</u>: Simpleks yönteminde, temeli terkeden değişkenin bulunduğu satıra *anahtar satır* denir.

•<u>Anahtar Sayı</u>: Anahtar sütun ile anahtar satırın kesiştiği gözedeki değere *anahtar sayı* denir.

•<u>Temele girecek değişkenin yeni değerlerinin hesaplanması</u>:

•(Anahtar Satır Değerleri/Anahtar Sayı)

•<u>Diğer Satır Değerlerinin Değerleri</u>:

$$\begin{bmatrix}\text{Eski}\\ \text{Satır}\\ \text{Elemanları}\end{bmatrix} - \begin{pmatrix}\text{Eski Satırla}\\ \text{Anahtar Sütunun}\\ \text{Kesiştiği Gözedeki Sayı}\end{pmatrix} \text{x} \begin{matrix}\text{Anahtar}\\ \text{Satırın Yeni}\\ \text{Elemanları}\end{matrix}$$

Örnek 4.2

•***Örnek 4.2***: Bir sanayii işletmesi bakır, alüminyum ve çinko metallerinin farklı alaşımlarını kullanarak A ve B gibi iki çeşit ürün üretmektedir. İşletmenin elinde 20 ton bakır, 30 ton alüminyum ve 40 ton çinko vardır. Bir birim A ve bir birim B'nin üretiminde kullanılan bakır, alüminyum ve çinko miktarları (ton) ile A ve B'nin bir biriminden elde edilen karlar (TL) aşağıdaki tabloda gösterilmiştir.

•Bu bilgileri ve tablodaki verileri kullanarak problemin doğrusal programlama modelini kurunuz ve işletmenin karını en büyükleyen üretim miktarlarını simpleks yöntemle bulunuz.

	Hammadde			
Ürün	Bakır	Alüminyum	Çinko	Kâr
A	6	3	1	2
B	4	1	1	3

Çözüm 4.2

Çözüm 4.2: Problemin doğrusal programlama modeli aşağıda gösterilmiştir.

$Z_{enb} = 2x_1 + 3x_2$

$6x_1 + 4x_2 \leq 20$ (Bakır kısıtı)

$3x_1 + x_2 \leq 30$ (Alüminyum kısıtı)

$x_1 + x_2 \leq 40$ (Çinko kısıtı)

$x_1, x_2 \geq 0$

Standart Biçim

$Z_{enb} = 2x_1 + 3x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5$

$6x_1 + 4x_2 + x_3 + 0x_4 + 0x_5 = 20$

$3x_1 + x_2 + 0x_3 + x_4 + 0x_5 = 30$

$x_1 + x_2 + 0x_3 + 0x_4 + x_5 = 40$

$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$

•

Tablo 4.2

Simpleks Başlangıç Çözüm Tablosu

TDV		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	ÇV	Oran
0	x_3	6	**4**	1	0	0	20	20/4 → AS
0	x_4	3	1	0	1	0	30	30/1
0	x_5	1	1	0	0	1	40	40/1
Z_j		0	0	0	0	0	0	
$Z_j - C_j$		-2	-3	0	0	0	-	
			↑ AS					

Z_j satır elemanları, bulundukları sütundaki katsayılarla temel değişkenlerin amaç fonksiyonu katsayılarının karşılıklı çarpımlarının toplamı olarak aşağıdaki gibi hesaplanmıştır.

$Z_1 = 0(6) + 0(3) + 0(1) = 0$

$Z_2 = 0(4) + 0(1) + 0(1) = 0$

$Z_3 = 0(1) + 0(0) + 0(0) = 0$

$Z_4 = 0(0) + 0(1) + 0(0) = 0$

$Z_5 = 0(0) + 0(0) + 0(1) = 0$

$Z_6 = 0(20) + 0(30) + 0(40) = 0$

Yukarıdaki Z_j değerlerinin kullanılmasıyla Z_j - C_j değerleri aşağıdaki gibi bulunur.

$Z_1 - C_1 = 0 - 2 = -2$

$Z_2 - C_2 = 0 - 3 = -3$

$Z_3 - C_3 = 0 - 0 = 0$

$Z_4 - C_4 = 0 - 0 = 0$

$Z_5 - C_5 = 0 - 0 = 0$

Çözüm 4.2

Anahtar satırın yeni elemanları,

$$[6/4 \quad 4/4 \quad 1/4 \quad 0/4 \quad 0/4 \quad 20/4]$$

veya gerekli aritmetik işlemlerin yapılmasıyla aşağıdaki gibi olur.

$$[3/2 \quad 1 \quad 1/4 \quad 0 \quad 0 \quad 5]$$

Bu değerlerin yeni çözüm tablosuna yerleştirilmesinden sonra tablonun diğer elemanları hesaplanabilir.

x_4 değişken satırından başlayarak diğer satır elemanlarını hesaplayalım. x_4 değişken satırının eski elemanları aşağıda gösterildiği gibidir.

$$[3 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 30]$$

Bu satırla anahtar sütunun kesiştiği yerdeki sayı 1 ve anahtar satırın yeni elemanları,

$$[3/2 \quad 1 \quad 1/4 \quad 0 \quad 0 \quad 5]$$

olduğuna göre, x_4 değişken satırının yeni elemanları,

$$\begin{array}{r} [3 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 30] \\ (-1)[3/2 \quad 1 \quad 1/4 \quad 0 \quad 0 \quad 5] \\ \hline [3/2 \quad 0 \quad -1/4 \quad 1 \quad 0 \quad 25] \end{array}$$

olarak hesaplanır.

Aynı yaklaşımla x_5 değişken satırının yeni elemanlarının,

$$\begin{array}{r} [1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 40] \\ \hline (-1)[3/2 \quad 1 \quad 1/4 \quad 0 \quad 0 \quad 5] \\ [-1/2 \quad 0 \quad -1/4 \quad 0 \quad 1 \quad 35] \end{array}$$

Tablo 4.3
Simpleks Birinci (En İyi) Çözüm Tablosu

TDV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	ÇV
3 x_2	3/2	1	1/4	0	0	5
0 x_4	3/2	0	-1/4	1	0	25
0 x_5	-1/2	0	-1/4	0	1	35
Z_j	9/2	3	3/4	0	0	15
$Z_j - C_j$	5/2	0	3/4	0	0	-

- Bu durumda Z = 15, amaç fonksiyonu için bulunabilecek en büyük değerdir. Bu çözümde $x_1 = 0$, $x_2 = 5$, $x_3 = 0$, $x_4 = 25$, $x_5 = 35$'dir. Bu durumda, işletme B'den 5 birim üretirken A'dan hiç üretmeyecek, böylece en yüksek kârı 15 TL olacaktır.
- Aylak değişkenlerin en iyi çözümdeki değerleri $x_3 = 0$, $x_4 = 25$, $x_5 = 35$'dir.

Örnek 4.3

Örnek 4.3: Aşağıdaki doğrusal programlama problemini simpleks yöntemle çözünüz.

$$Z_{enb} = 10x_1 + 22x_2 + 18x_3$$

$$\begin{aligned} x_1 + 4x_2 + 3x_3 &\leq 24 \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 &\leq 46 \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 &\leq 60 \\ 4x_1 + 8x_2 + 3x_3 &\leq 120 \end{aligned}$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Çözüm 4.3

- ***Çözüm 4.3***: Problemin standart biçimi aşağıda gösterilmiştir.

$Z_{enb} = 10x_1 + 22x_2 + 18x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 + 0x_7$

$$\begin{aligned} x_1 + 4x_2 + 3x_3 + x_4 + 0x_5 + 0x_6 + 0x_7 &= 24 \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 0x_4 + x_5 + 0x_6 + 0x_7 &= 46 \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 0x_4 + 0x_5 + x_6 + 0x_7 &= 60 \\ 4x_1 + 8x_2 + 3x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 + x_7 &= 120 \end{aligned}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0$$

Problemin simpleks başlangıç çözüm tablosu şöyledir.

Tablo 4.4
Simpleks Başlangıç Çözüm Tablosu

TDV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	ÇV	Oran	
0 x_4	1	**4**	3	1	0	0	0	24	24/4 = 6 →	AS
0 x_5	2	2	4	0	1	0	0	46	46/2 = 23	
0 x_6	3	5	6	0	0	1	0	60	60/5 = 12	
0 x_7	4	8	3	0	0	0	1	120	120/8 = 15	
Z_j	0	0	0	0	0	0	0	0		
$Z_j - C_j$	-10	-22	-18	0	0	0	0	-		

AS

Çözüm 4.3

- Anahtar satırın yeni değerleri:

[1 4 3 1 0 0 0 24]

olduğuna göre, anahtar satırın yeni elemanları,

[1/4 4/4 3/4 1/4 0/4 0/4 0/4 24/4]

veya gerekli aritmetik işlemlerin yapılmasıyla aşağıdaki gibi bulunur.

[1/4 1 3/4 1/4 0 0 0 6]

Bu değerlerin yeni çözüm tablosuna yerleştirilmesinden sonra bu tablonun diğer elemanları hesaplanabilir.

x_5 değişken satırından başlayarak diğer satır elemanlarını hesaplayalım. Söz konusu değerler aşağıdaki gibi bulunur.

x_5 değişken satırının yeni elemanlarının hesaplanması:

	[2	2	4	0	1	0	0	46]
(-2)	[1/4	1	3/4	1/4	0	0	0	6]
	[3/2	0	5/2	-1/2	1	0	0	34]

x_6 değişken satırının yeni elemanlarının hesaplanması:

	[3	5	6	0	0	1	0	60]
(-5)	[1/4	1	3/4	1/4	0	0	0	6]
	[7/4	0	9/4	-5/4	0	1	0	30]

x_7 değişken satırının yeni elemanlarının hesaplanması:

	[4	8	3	0	0	0	1	120]
(-8)	[1/4	1	3/4	1/4	0	0	0	6]
	[2	0	-3	-2	0	0	1	72]

Çözüm 4.3

Tablo 4.5
Simpleks Birinci Çözüm Tablosu

TDV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	ÇV	Oran
22 x_2	1/4	1	3/4	1/4	0	0	0	6	6/(1/4) = 24.00
0 x_5	3/2	0	5/2	-1/2	1	0	0	34	34/(3/2) = 22.33
0 x_6	**7/4**	0	9/4	-5/4	0	1	0	30	30/(7/4) = 17.11 →
0 x_7	2	0	-3	-2	0	0	1	72	
Z_j	11/2	22	33/2	11/2	0	0	0	132	
$Z_j - C_j$	-9/2 ↑	0	-3/2	11/2	0	0	0	-	-

Tablo 4.6
Simpleks İkinci (En iyi) Çözüm Tablosu

TDV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	ÇV
22 x_2	0	1	3/7	3/7	0	-1/7	0	12/7
0 x_5	0	0	4/7	4/7	1	-6/7	0	58/7
10 x_1	1	0	9/7	-5/7	0	4/7	0	120/7
0 x_7	0	0	-39/7	-4/7	0	-8/7	1	264/7
Z_j	10	22	156/7	16/7	0	18/7	0	1464/7
$Z_j - C_j$	0	0	30/7	16/7	0	18/7	0	-

Örnek 4.4

Örnek 4.4: Aşağıdaki doğrusal programlama problemini simpleks yöntemle çözünüz.

$$Z_{enb} = -2x_1 - 3x_2 - x_3$$

$$x_1 + 4x_2 + 2x_3 \geq 8$$
$$3x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 6$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Çözüm 4.4: Simpleks yöntemle çözüm yapabilmek için önce eşitsizlikleri eşitlik biçiminde yazalım. Her bir kısıtlayıcı fonksiyona birer yapay değişken eklenir, aynı kısıtlayıcılardan birer artık değişken çıkartılırsa örnek problemin modeli simpleks yöntem için uygun biçime dönüştürülmüş olur.

$$Z_{enb} = -2x_1 - 3x_2 - x_3 + 0x_4 + 0x_5 - MA_1 - MA_2$$

$$x_1 + 4x_2 + 2x_3 - x_4 + A_1 = 8$$
$$3x_1 + 2x_2 + x_3 - x_5 + A_2 = 6$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, A_1, A_2 \geq 0$$

Standart biçimdeki bilgilerin kullanılmasıyla oluşturulan tablo aşağıda gösterilmiştir.

$$Z_1 = (-M)(1) + (-M)(3) = -4M$$
$$Z_2 = (-M)(4) + (-M)(2) = -6M$$
$$Z_3 = (-M)(2) + (-M)(1) = -3M$$
$$Z_4 = (-M)(-1) + (-M)(0) = M$$
$$Z_5 = (-M)(0) + (-M)(-1) = M$$
$$Z_6 = (-M)(1) + (-M)(0) = -M$$
$$Z_7 = (-M)(0) + (-M)(1) = -M$$
$$Z_8 = (-M)(8) + (-M)(6) = -14M$$

Tablo 4.7

Simpleks Başlangıç Çözüm Tablosu

TDV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	A_1	A_2	ÇV	Oran
-M A_1	1	**4**	2	-1	0	1	0	8	8/4 = 2 ⟶ AS
-M A_2	3	2	1	0	-1	0	1	6	6/2 = 3
Z_j	-4M	-6M	-3M	M	M	M	M	-14M	
$Z_j - C_j$	-4M+2	-6M+3	-3M+1	M	M	0	0	-	
		↑ AS							

$$Z_1 - C_1 = (-4M) - (-2) = -4M + 2$$
$$Z_2 - C_2 = (-6M) - (-3) = -6M + 3$$
$$Z_3 - C_3 = (-3M) - (-1) = -3M + 1$$
$$Z_4 - C_4 = M - (0) = M$$
$$Z_5 - C_5 = M - (0) = M$$
$$Z_6 - C_6 = (-M) - (-M) = 0$$
$$Z_7 - C_7 = (-M) - (-M) = 0$$

Çözüm 4.4

Tablo 4.8
Simpleks Birinci Çözüm Tablosu

TDV		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	A_1	A_2	ÇV
-3	x_2	1/4	1	1/2	-1/4	0	1/4	0	2
-M	A_2	**5/2**	0	0	1/2	-1	-1/2	1	2 →
Z_j		$\frac{-3-10M}{4}$	-3	-3/2	$\frac{3-2M}{4}$	M	$\frac{-3+2M}{4}$	-M	-2M-6
$Z_j - C_j$		$\frac{5-10M}{4}$ ↑	0	-1/2	$\frac{3-2M}{4}$	M	$\frac{-3+6M}{4}$	0	-

Tablo 4.9
Simpleks İkinci Çözüm Tablosu

TDV		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	A_1	A_2	ÇV
-3	x_2	0	1	**1/2**	-3/10	1/10	3/10	-1/10	9/5 →
-2	x_1	1	0	0	1/5	-2/5	-1/5	2/5	4/5
Z_j		-2	-3	-3/2	1/2	1/2	-1/2	-1/2	-7
$Z_j - C_j$		0	0	-1/2 ↑	1/2	1/2	$\frac{2M-1}{2}$	$\frac{2M-1}{2}$	-

Çözüm 4.4

- ***Tablo 4.10***
Simpleks Üçüncü (En iyi) Çözüm Tablosu

TDV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	A_1	A_2	ÇV
-1 x_3	0	2	1	-3/5	1/5	3/5	-1/5	18/5
-2 x_1	1	0	0	1/5	-2/5	-1/5	2/5	4/5
Z_j	-2	-2	-1	1/5	3/5	-1/5	-3/5	-26/5
$Z_j - C_j$	0	1	0	1/5	3/5	$\frac{5M-1}{5}$	$\frac{5M-3}{5}$	-

Tablo 4.10'daki temel uygun çözümde tüm $Z_j - C_j \geq 0$ olduğundan çözüm en iyidir. Bu çözümde, $x_1 = 4/5$, $x_2 = 0$, $x_3 = 18/5$, $x_4 = 0$, $x_5 = 0$, $A_1 = 0$, $A_2 = 0$ olarak belirlenmiştir. Amaç fonksiyonunun en büyük değeri $Z_{enb} = -26/5$'dir.

Örnek 4.5

Örnek 4.5: Aşağıdaki doğrusal programlama problemini simpleks yöntemle çözünüz.

$$Z_{enb} = 21x_1 + x_2 + x_3$$

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + 4x_3 &= 20 \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 &= 30 \end{aligned}$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Çözüm 4.5: Kısıtlayıcılar eşitlik biçiminde olduğundan, her birine (+1) katsayılı yapay değişken eklenmesi gerekir. Bu yolla elde edilen model aşağıda gösterilmiştir.

$$Z_{enb} = 21x_1 + x_2 + x_3 - MA_1 - MA_2$$

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + 4x_3 + A_1 \quad &= 20 \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 \quad + A_2 &= 30 \end{aligned}$$

$$x_1, x_2, x_3, A_1, A_2 \geq 0$$

Tablo 4.11
Simpleks Başlangıç Çözüm Tablosu

TDV	x_1	x_2	x_3	A_1	A_2	ÇV
-M A_1	2	1	**4**	1	0	20
-M A_2	1	3	4	0	1	30
Z_j	-3M	-4M	-8M	-M	-M	-50M
Z_j - C_j	-3M-21	-4M-1	-8M-1	0	0	-

Çözüm 4.5

Tablo 4.14
Simpleks Üçüncü (En İyi) Çözüm Tablosu

TDV	x_1	x_2	x_3	A_1	A_2	ÇV
21 x_1	1	0	8/5	3/5	-1/5	6
1 x_2	0	1	4/5	-1/5	2/5	8
Z_j	21	1	172/5	62/5	-19/5	134
Z_j - C_j	0	0	167/2	$\frac{5M+62}{8}$	$\frac{5M-19}{5}$	-

Son satırın tüm elemanları ≥ 0 olduğundan, en iyi çözüm elde edilmiştir. Bu en iyi çözümde, $x_1 = 6$, $x_2 = 8$, $x_3 = x_4 = x_5 = 0$ ve $Z_{enb} = 134$'dür.

Enküçükleme Problemleri

Örnek 4.6: Aşağıdaki doğrusal programlama problemini simpleks yöntemle çözünüz.

$$Z_{enk} = 3x_1 + 2x_2 + x_3$$

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + x_3 &\geq 21 \\ x_1 + x_2 + x_3 &\geq 12 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Çözüm 4.6: Önceden olduğu gibi öncelikle problemin standart biçimde yazılması gerekmektedir. Yukarıda yapılan açıklamalar doğrultusunda eklenen ve çıkartılan değişkenlerle problemin standart biçimi aşağıdaki gibi elde edilir.

$$Z_{enk} = 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 0x_4 + 0x_5 + MA_1 + MA_2$$

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 + A_1 \qquad &= 21 \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_5 \qquad + A_2 &= 12 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, A_1, A_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Problemin standart biçimindeki bilgilerin kullanılmasıyla düzenlenen başlangıç çözüm tablosu aşağıda gösterilmiştir.

Tablo 4.15
Simpleks Başlangıç Çözüm Tablosu

TDV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	A_1	A_2	ÇV
M A_1	2	**3**	1	-1	0	1	0	21
M A_2	1	1	1	0	-1	0	1	12
Z_j	3M	4M	2M	-M	-M	M	M	33M
$Z_j - C_j$	3M-3	4M-2	2M-1	-M	-M	0	0	-

Çözüm 4.6

•

Tablo 4.16
Simpleks Birinci Çözüm Tablosu

TDV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	A_1	A_2	ÇV
2 x_2	2/3	1	1/3	-1/3	0	1/3	0	7
M A_2	1/3	0	**2/3**	1/3	-1	-1/3	1	5
Z_j	$\frac{M+4}{3}$	2	$\frac{2M+2}{3}$	$\frac{M-2}{3}$	-M	$\frac{-M+2}{3}$	M	5M+14
Z_j - C_j	$\frac{M-5}{3}$	0	$\frac{2M-1}{3}$	$\frac{M-2}{3}$	-M	$\frac{-4M+2}{3}$	0	-

Tablo 4.17
Simpleks İkinci (En İyi) Çözüm Tablosu

TDV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	A_1	A_2	ÇV
2 x_2	1/2	1	0	-1/2	1/2	1/2	-1/2	9/2
1 x_3	1/2	0	1	1/2	-3/2	-1/2	3/2	15/2
Z_j	3/2	2	1	-1/2	-1/2	1/2	1/2	33/2
Z_j - C_j	-3/2	0	0	-1/2	-1/2	$\frac{-2M+1}{2}$	$\frac{-2M+1}{2}$	-

Tüm $Z_j - C_j \leq 0$ olduğundan, en iyi çözüme ulaşılmış ve $x_1 = 0$, $x_2 = 9/2$, $x_3 = 15/2$, $x_4 = 0$, $x_5 = 0$, $A_1 = 0$, $A_2 = 0$ ve Zenk = 33/2 olarak belirlenmiştir.

Temele Girecek Değişken Katsayılarının Eşit Olması

- ***Örnek 4.7***: Aşağıdaki doğrusal programlama problemini simpleks yöntemle çözünüz.

$$Z_{enb} = 8x_1 + 8x_2 + 6x_3$$

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 &\le 12 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 &\le 4 \\ 3x_1 + 5x_2 \qquad &\le 10 \\ x_1, x_2, x_3 &\ge 0 \end{aligned}$$

Çözüm 4.7: Problemin standart biçimi aşağıda verilmiştir.

$$Z_{enb} = 8x_1 + 8x_2 + 6x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6$$

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 \qquad\qquad &= 12 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \qquad + x_5 \qquad &= 4 \\ 3x_1 + 5x_2 \qquad\qquad\qquad + x_6 &= 10 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 &\ge 0 \end{aligned}$$

Tablo 4.18

Simpleks Başlangıç Çözüm Tablosu

TDV		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	ÇV
0	x_4	2	3	4	1	0	0	12
0	x_5	1	2	1	0	1	0	4
0	x_6	**3**	5	0	0	0	1	10 →
Z_j		0	0	0	0	0	0	0
$Z_j - C_j$		-8 ↑	-8 ↑	-6	0	0	0	-

Çözüm 4.7

Tablo 4.19
Simpleks Birinci Çözüm Tablosu

TDV		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	ÇV
0	x_4	0	-1/3	4	1	0	-2/3	16/3
0	x_5	0	1/3	**1**	0	1	-1/3	2/3 →
8	x_1	1	5/3	0	0	0	1/3	10/3
Z_j		8	40/3	0	0	0	8/3	80/3
$Z_j - C_j$		0	16/3	-6 ↑	0	0	8/3	-

Tablo 4.20
Simpleks İkinci (En İyi) Çözüm Tablosu

TDV		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	ÇV
0	x_4	0	-5/3	0	1	-4	2/3	8/3
6	x_3	0	1/3	1	0	1	-1/3	2/3
8	x_1	1	5/3	0	0	0	1/3	10/3
Z_j		8	46/3	6	0	6	2/3	92/3
$Z_j - C_j$		0	22/3	0	0	6	2/3	-

Bozulma Durumu

Örnek 4.8: Aşağıdaki doğrusal programlama problemini simpleks yöntemle çözünüz.

$Z_{enb} = 8x_1 + 6x_2 + 5x_3$

$$\begin{aligned} 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 &\leq 12 \\ 2x_1 \qquad\;\; + 5x_3 &\leq 8 \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 &\leq 4 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Çözüm 4.8: Problemin standart biçimi aşağıda gösterilmiştir.

$Z_{enb} = 8x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6$

$$\begin{aligned} 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + x_4 \qquad\qquad &= 12 \\ 2x_1 \qquad\;\; + 5x_3 \quad + x_5 \qquad &= 8 \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 \qquad\qquad + x_6 &= 4 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 &\geq 0 \end{aligned}$$

Tablo 4.21
Simpleks Başlangıç Çözüm Tablosu

TDV		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	ÇV	Oran
0	x_4	3	4	5	1	0	0	16/3	12/3 = 4 →
0	x_5	2	0	5	0	1	0	2/3	8/2 = 4 →
0	x_6	1	4	2	0	0	1	10/3	4/1 = 4 →
Z_j		0	0	0	0	0	0	80/3	
$Z_j - C_j$		-8 ↑	-6	-5	0	0	0	-	

TDV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_4	3/3	4/3	5/3	1/3	0/3	0/3
x_5	2/2	0/2	5/2	0/2	1/2	0/2
x_6	1/1	4/1	2/1	0/1	0/1	1/1

Gövde (x_1–x_3) — Birim Matris (x_4–x_6)

Çözüm 4.8

•

Tablo 4.22
Simpleks Birinci Çözüm Tablosu

TDV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	ÇV
0 x_4	0	4	-5/2	1	-3/2	0	0
8 x_1	1	0	5/2	0	1/2	0	4
0 x_6	0	**4**	-1/2	0	-1/2	1	0
Z_j	8	0	20	0	4	0	32
$Z_j - C_j$	0	-6	15	0	0	0	-

Tablo 4.23
Simpleks İkinci (En iyi) Çözüm Tablosu

TDV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	ÇV
0 x_4	0	0	-2	1	-1	-1	0
8 x_1	1	0	5/2	0	1/2	0	4
6 x_2	0	1	-1/8	0	-1/8	1/4	0
Z_j	8	6	77/4	0	13/4	3/2	32
$Z_j - C_j$	0	0	57/4	0	13/4	3/2	-

Sınırsız Çözüm

•***Örnek 4.9***: Aşağıdaki doğrusal programlama problemini simpleks yöntemle çözünüz.

$Z_{enb} = 2x_1 + 5x_2 + 9x_3$

$x_1 + x_2 + 4x_3 \geq 12$

$x_1 + x_2 + x_3 \geq 4$

$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

Çözüm 4.9: Problemin standart biçimi aşağıda verilmiştir.

$Z_{enb} = 2x_1 + 5x_2 + 9x_3 + 0x_4 + 0x_5 - MA_1 - MA_2$

$x_1 + x_2 + 4x_3 - x_4 + A_1 = 12$

$x_1 + x_2 + x_3 - x_5 + A_2 = 4$

$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, A_1, A_2 \geq 0$

Tablo 4.24
Simpleks Başlangıç Çözüm Tablosu

TDV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	A_1	A_2	ÇV
-M A_1	1	1	**4**	-1	0	1	1	12
-M A_2	1	1	1	0	-1	0	0	4
Z_j	-2M	-2M	-5M	M	M	-M	-M	-16M
$Z_j - C_j$	-2M-2	-2M-5	-5M-9	M	M	0	0	-

Tablo 4.25
Simpleks Birinci Çözüm Tablosu

TDV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	A_1	A_2	ÇV
9 x_3	1/4	1/4	1	-1/4	0	1/4	0	3
-M A_2	3/4	**3/4**	0	1/4	-1	-1/4	1	1
Z_j	$\frac{-3M+9}{4}$	$\frac{-3M+9}{4}$	9	$\frac{-M-9}{4}$	M	$\frac{M+9}{4}$	-M	27-M
$Z_j - C_j$	$\frac{-3M+1}{4}$	$\frac{-3M-11}{4}$	0	$\frac{-M-9}{4}$	M	$\frac{5M+9}{4}$	0	-

Çözüm 4.9

•

Tablo 4.26
Simpleks İkinci Çözüm Tablosu

TDV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	A_1	A_2	ÇV
9 x_3	0	0	1	-1/3	**1/3**	1/3	-1/3	8/3
5 x_2	1	1	0	1/3	-4/3	-1/3	4/3	4/3
Z_j	5	5	9	-4/3	-11/3	4/3	11/3	92/3
$Z_j - C_j$	3	0	0	-4/3	-11/3	$\frac{3M+4}{3}$	$\frac{3M+11}{3}$	-

Tablo 4.27
Simpleks Üçüncü Çözüm Tablosu

TDV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	A_1	A_2	ÇV
0 x_5	0	0	3	-1	1	1	-1	8/3
5 x_2	1	1	4	-1	0	1	0	12
Z_j	5	5	20	-5	0	5	0	60
$Z_j - C_j$	3	0	11	-5	0	M+5	M	-

Alternatif En iyi Çözümler

- ***Örnek 4.10***: Aşağıdaki problemi simpleks yöntemle çözerek problemin en iyi çözümünü bulunuz.

$$Z_{enb} = 2x_1 + 4x_2 + 6x_3$$

$$\begin{aligned} 4x_1 + 8x_2 + 12x_3 &\le 36 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 &\le 12 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 &\le 20 \end{aligned}$$

$$x_1, x_2, x_3 \ge 0$$

Çözüm 4.10: Aylak değişkenlerin modele sokulmasıyla elde edilen standart biçim aşağıda gösterilmiştir.

$$Z_{enb} = 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6$$

$$\begin{aligned} 4x_1 + 8x_2 + 12x_3 + x_4 \qquad\qquad &= 36 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 \qquad + x_5 \qquad &= 12 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 \qquad\qquad + x_6 &= 20 \end{aligned}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \ge 0$$

Tablo 4.28
Simpleks Başlangıç Çözüm Tablosu

TDV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	ÇV
0 x_4	4	8	**12**	1	0	0	36
0 x_5	1	1	3	0	1	0	12
0 x_6	2	2	1	0	0	1	20
Z_j	0	0	0	0	0	0	0
$Z_j - C_j$	-2	-4	-6	0	0	0	-

Uygun Olmayan Çözüm

- ***Örnek 4.11***: Aşağıdaki problemi simpleks yöntemle çözünüz.

$Z_{enk} = 2x_1 + 2x_2$

$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 &\le 4 \\ x_1 + 2x_2 &\ge 5 \\ 3x_1 + 4x_2 &\le 6 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

Çözüm 4.11: Uygun değişkenlerin eklenip çıkartılmasıyla belirlenen standart biçim aşağıda verildiği gibidir.

$Z_{enk} = 2x_1 + 2x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 + MA_1$

$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 + x_3 &= 4 \\ x_1 + 2x_2 - x_4 + A_1 &= 5 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_5 &= 6 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, A_1 &\ge 0 \end{aligned}$$

Tablo 4.31
Simpleks Başlangıç Çözüm Tablosu

TDV	x_1	x_2	x_4	x_3	x_5	A_1	ÇV
0 x_3	-1	1	0	1	0	0	4
M A_1	1	2	-1	0	0	1	5
0 x_5	3	**4**	0	0	1	0	6
Z_j	M	2M	-M	0	0	M	5M
$Z_j - C_j$	M-2	2M-2	-M	0	0	0	-

Tablo 4.32
Simpleks Birinci Çözüm Tablosu

TDV	x_1	x_2	x_4	x_3	x_5	A_1	ÇV
0 x_3	-7/4	0	0	1	-1/4	0	5/2
M A_1	-1/2	0	-1	0	-1/2	1	2
2 x_2	3/4	1	0	0	1/4	0	3/2
Z_j	$\frac{3-M}{2}$	2	-M	0	$\frac{1-M}{2}$	M	2M+3
$Z_j - C_j$	$\frac{-M-1}{2}$	0	-M	0	$\frac{1-M}{2}$	0	-

Sınırlandırılmamış Değişkenlerle Çözüm

Örnek 4.12: Aşağıdaki problemi simpleks yöntemle çözünüz.

$Z_{enb} = 2x_1 + x_2$

$3x_1 + x_2 \leq 6$

$x_1 + x_2 \leq 4$

$x_1 > 0$, x_2 işareti sınırlandırılmamış

Çözüm 4.12: Simpleks yöntem için önce işareti sınırlandırılmamış x_2 değişkeni yerine, $x_2 = x_2^+ - x_2^-$ yazalım. Bu durumda yukarıda verilen doğrusal programlama problemi aşağıdaki gibi olur.

$Z_{enb} = 2x_1 + (x_2^+ - x_2^-)$

$3x_1 + (x_2^+ - x_2^-) \leq 6$

$x_1 + (x_2^+ - x_2^-) \leq 4$

$x_1,\ x_2^+, x_2^- \geq 0$

$Z_{enb} = 2x_1 + (x_2^+ - x_2^-)$

$3x_1 + (x_2^+ - x_2^-) + x_3 = 6$

$x_1 + (x_2^+ - x_2^-) + x_4 = 4$

$x_1,\ x_2^+, x_2^-, x_3, x_4 \geq 0$

Tablo 4.33
Simpleks Başlangıç Çözüm Tablosu

TDV	x_1	x_2^+	x_2^-	x_3	x_4	ÇV
x_3	**3**	1	2	-1	0	6
x_4	1	1	1	0	-1	4
Z_j	0	0	0	0	0	0
$Z_j - C_j$	-2	-1	1	0	0	-

Çözüm 4.12

-

Tablo 4.34
Simpleks Birinci Çözüm Tablosu

TDV	x_1	x_2^+	x_2^-	x_3	x_4	ÇV
x_3	**3**	1	-1	1	0	6
x_4	1	1	-1	0	1	4
Z_j	0	0	0	0	0	0
$Z_j - C_j$	-2	-1	1	0	0	-

Tablo 4.35
Simpleks İkinci Çözüm Tablosu

TDV	x_1	x_2^+	x_2^-	x_3	x_4	ÇV
x_1	1	1/3	-1/3	1/3	0	2
x_4	0	2/3	-2/3	-1/3	1	2
Z_j	2	2/3	-2/3	2/3	0	4
$Z_j - C_j$	0	-1/3	1/3	2/3	0	-

Tablo 4.36
Simpleks Üçüncü (En iyi) Çözüm Tablosu

TDV	x_1	x_2^+	x_2^-	x_3	x_4	ÇV
x_1	1	0	0	1/2	-1/2	1
x_2^-	0	1	-1	-1/2	3/2	3
Z_j	2	1	-1	1/2	1/2	5
$Z_j - C_j$	0	0	0	1/2	1/2	-

Tablo 4.36'daki temel uygun çözümde tüm $Z_j - C_j \geq 0$ olduğundan çözüm en iyidir. Bu çözümde, $x_1 = 1$, $x_2^+ = 3$, $x_2^- = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$ olarak belirlenmiştir. Amaç fonksiyonunun en büyük değeri $Z_{enb} = 5$'dir. $x_2 = x_2^+ - x_2^-$ olduğu göz önünde bulundurulduğunda $x_2 = 3$ olarak belirlenir. Diğer taraftan en iyi çözümün temelde bulunmayan değişkenlerinden x_2^-'ye ait $Z_j - C_j$ değerinin sıfıra eşit olduğu, dolayısıyla bir alternatif çözüm bulunduğu görülebilir.

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

DOĞRUSAL PROGRAMLAMA
İKİ AŞAMALI SİMPLEKS ÇÖZÜM YÖNTEMİ

Prof.Dr. Ünal H. ÖZDEN

- Büyük M yöntemi, yapay değişkenlerin kullanıldığı problemlerin çözümünde en çok kullanılan yöntem olmakla birlikte, diğer çözüm yöntemleri de araştırmacılar tarafından ele alınmıştır. Değişik çözüm tekniklerinden birisi de *iki aşamalı simpleks yöntemidir*. Büyük M yönteminin sakıncalarını gidermek ve hesaplamanın etkinliğini arttırmak amacıyla geliştirilen iki aşamalı yöntem hesaplamada iki aşama gerektirdiğinden bu isimle anılmaktadır.

Birinci Aşama

- ***Birinci aşama***: Problemin kısıtlayıcı fonksiyonları uygun değişkenlerle standart biçim kısıtlayıcı fonksiyonlarına dönüştürülür. Bu işlemden sonra problemin orijinal amaç fonksiyonu yerine kullanılacak yeni bir amaç fonksiyonu tanımlanır ve problem klasik simpleks yöntemin bilinen kural ve işlemleriyle aynı süreç izlenerek çözülür.

Birinci Aşama

Gerçek amaç fonksiyonu yerine geçirilen değiştirilmiş amaç fonksiyonunda, yapay değişkenler dışında kalan tüm değişkenlerin katsayıları sıfır, yapay değişkenlerin katsayıları ise en büyükleme problemlerinde (-1), en küçükleme problemlerinde (+1) kabul edilir.

$$Z^*_{enb} = -A_1 - A_2 - \ldots - A_r$$

en küçükleme problemlerinin değiştirilmiş amaç fonksiyonu,

$$Z^*_{enk} = A_1 + A_2 + \ldots + A_r$$

olur.

Birinci Aşama

- Değiştirilmiş amaç fonksiyonunun değeri sıfır ise bu durumda yapay değişkenlerin değerinin sıfır olduğu anlamına gelir ve ikinci aşamaya geçilir. Aksi takdirde uygun çözüm yoktur.
- Bir ya da birden fazla yapay değişken sıfır değerli olarak temelde kalmış olabilir. Çözüm değeri sıfır olan yapay değişkenlerin temelde bulunması orijinal problemin çözümüne ulaşmayı engellememekle birlikte, kısıtlayıcı fonksiyonlarda fazlalık bulunması söz konusu olabilir.

İkinci Aşama

- ***İkinci aşama***: Birinci aşamada belirlenen çözüm, orijinal problemin çözümü için temel oluşturur. Temelde hiçbir yapay değişken bulunmadığı durumda birinci aşamanın çözüm tablosundaki yapay değişken sütunları devre dışı bırakılır. Bu, çözüm tablosunda gerçekleştirilmesi gereken ilk değişikliktir. Diğer bir değişiklik, Z_j ve Z_j - C_j değerlerinde ortaya çıkar. Değişkenlerin orijinal amaç fonksiyonu katsayıları kullanılarak Z_j ve Z_j - C_j'nin yeni değerleri hesaplanır ve ikinci aşamanın başlangıç tablosu oluşturulur. Bundan sonra simpleks yöntemin bilinen işlemleriyle problemin en iyi çözümü elde edilir.

İkinci Aşama

- Birinci aşamanın temelde sıfır değerli bir yapay değişken olması durumunda ikinci aşamanın başlangıç tablosunun Z_j ve Z_j - C_j değerlerinin hesaplanabilmesi için sıfır değerli yapay değişkenlerin amaç fonksiyonundaki katsayıları sıfır, diğer değişkenlerin ise orijinal amaç fonksiyonundaki katsayıları esas alınır.

Örnek-1

- Aşağıdaki doğrusal programlama probleminin iki aşamalı simpleks yöntemle çözünüz.
- $Z_{enk} = 2x_1 + 3x_2 + x_3$
- $x_1 + 4x_2 + 2x_3 \geq 8$
- $3x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 6$
- $x_1 + x_2 \geq 3$
- $x_1, x_2, x_3 \geq 0$

Örnek-1 (Devam)

- $= A_1 + A_2 + A_3$
- $x_1 + 4x_2 + 2x_3 - x_4 + A_1 = 8$
- $3x_1 + 2x_2 + x_3 - x_5 + A_2 = 6$
- $x_1 + x_2 - x_6 + A_3 = 3$
- negatif olmama koşulu,
- $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, A_1, A_2, A_3 \geq 0$

Örnek-1 (Devam)

Tablo 6.7
İki Aşamalı Simpleks Birinci Aşama Başlangıç Çözüm Tablosu

TDV		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	A_1	A_2	A_3	ÇV
1	A_1	1	**4**	2	-1	0	0	1	0	0	8
1	A_2	3	2	1	0	-1	0	0	1	0	6
1	A_3	1	1	0	0	0	-1	0	0	1	3
Z_j^*		5	7	3	-1	-1	-1	1	1	1	17
$Z_j^* - C_j^*$		5	7	3	-1	-1	-1	0	0	0	-

Örnek-1 (Devam)

Tablo 6.8
İki Aşamalı Simpleks Birinci Aşama Birinci Çözüm Tablosu

TDV		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	A_1	A_2	A_3	ÇV
0	x_2	1/4	1	1/2	-1/4	0	0	1/4	0	0	2
1	A_2	**5/2**	0	0	1/2	-1	0	-1/2	1	0	2
1	A_3	3/4	0	-1/2	1/4	0	-1	-1/4	0	1	1
Z_j^*		13/4	0	-1/2	3/4	-1	-1	-3/4	1	1	3
$Z_j^* - C_j^*$		13/4	0	-1/2	3/4	-1	-1	-7/4	0	0	-

Örnek-1 (Devam)

Tablo 6.9
İki Aşamalı Simpleks Birinci Aşama İkinci Çözüm Tablosu

TDV		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	A_1	A_2	A_3	ÇV
0	x_2	0	1	1/2	-3/10	1/10	0	3/10	-1/10	0	9/5
0	x_1	1	0	0	1/5	-2/5	0	-1/5	2/5	0	4/5
1	A_3	0	0	-1/2	1/10	**3/10**	-1	-1/10	-3/10	1	2/5
Z_j^*		0	0	-1/2	1/10	3/10	-1	-1/10	-3/10	1	2/5
$Z_j^* - C_j^*$		0	0	-1/2	1/10	3/10	-1	-11/10	-13/10	0	-

Örnek-1 (Devam)

Tablo 6.10

İki Aşamalı Simpleks Birinci Aşama Üçüncü (En İyi) Çözüm Tablosu

TDV		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	A_1	A_2	A_3	ÇV
0	x_2	0	1	2/3	-1/3	0	1/3	1/3	0	-1/3	5/3
0	x_1	1	0	-2/3	1/3	0	-4/3	-1/3	0	4/3	4/3
0	x_5	0	0	-5/3	1/3	1	-10/3	-1/3	-1	10/3	4/3
Z_j^*		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$Z_j^* - C_j^*$		0	0	0	0	0	0	-1	-1	-1	-

Örnek-1 (Devam)

Tablo 6.11
İki Aşamalı Simpleks İkinci Aşama
Başlangıç (En İyi) Çözüm Tablosu

TDV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	ÇV
3 x_2	0	1	2/3	-1/3	0	1/3	5/3
2 x_1	1	0	-2/3	1/3	0	-4/3	4/3
0 x_5	0	0	-5/3	1/3	1	-10/3	4/3
Z_j	2	3	2/3	-1/3	0	-5/3	23/3
$Z_j - C_j$	0	0	-1/3	-1/3	0	-5/3	-

Örnek-2

- $Z_{enb} = 5x_1 + x_2$
- $x_1 - x_2 \geq 3$
- $-x_1 + 4x_2 \geq 1$
- $x_1 + 2x_2 \leq 8$
- $x_1, x_2 \geq 0$

Örnek-2 (Devam)

- $Z^*_{enb} = -A_1 - A_2$
- $x_1 - x_2 - x_3 + A_1 = 3$
- $-x_1 + 4x_2 - x_4 + A_2 = 1$
- $x_1 + 2x_2 + x_5 = 8$
- $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, A_1, A_2 \geq 0$

Örnek-2 (Devam)

Tablo 6.12

İki Aşamalı Simpleks Birinci Aşama Başlangıç Tablosu

TDV		x_1	x_2	x_3	x_4	A_1	A_2	x_5	ÇV
-1	A_1	1	-1	-1	0	1	0	0	3
-1	A_2	-1	**4**	0	-1	0	1	0	1
0	x_5	1	2	0	0	0	0	1	8
Z_j^*		0	-3	1	1	-1	-1	0	-4
$Z_j^* - C_j^*$		0	-3	1	1	0	0	0	-

Örnek-2 (Devam)

Tablo 6.13

İki Aşamalı Simpleks Birinci Aşama Birinci Çözüm Tablosu

TDV		x_1	x_2	x_3	x_4	A_1	A_2	x_5	ÇV
-1	A_1	**3/4**	0	-1	-1/4	1	1/4	0	13/4
0	x_2	-1/4	1	0	-1/4	0	1/4	0	1/4
0	x_5	3/2	0	0	1/2	0	-1/2	1	15/2
Z_j^*		-3/4	0	1	1/4	-1	-1/4	0	-13/4
$Z_j^* - C_j^*$		-3/4	0	1	1/4	0	3/4	0	-

Örnek-2 (Devam)

Tablo 6.14
İki Aşamalı Simpleks Birinci Aşama İkinci (En İyi) Çözüm Tablosu

TDV		x_1	x_2	x_3	x_4	A_1	A_2	x_5	ÇV
0	x_1	1	0	-4/3	-1/3	4/3	1/3	0	13/3
0	x_2	0	1	-1/3	-1/3	1/3	1/3	0	4/3
0	x_5	0	0	2	1	-2	-1	1	1
Z_j^*		0	0	0	0	0	0	0	0
$Z_j^* - C_j^*$		0	0	0	0	1	1	0	-

Örnek-2 (Devam)

Tablo 6.15
İki Aşamalı Simpleks İkinci Aşama Başlangıç Çözüm Tablosu

TDV		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	ÇV
5	x_1	1	0	-4/3	-1/3	0	13/3
1	x_2	0	1	-1/3	-1/3	0	4/3
0	x_5	0	0	**2**	1	1	1
Z_j		5	1	-7	-2	0	23
$Z_j - C_j$		0	0	-7	-2	0	-

Örnek-2 (Devam)

Tablo 6.16
İki Aşamalı Simpleks İkinci Aşama
Birinci (En İyi) Çözüm Tablosu

TDV		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	ÇV
5	x_1	1	1	0	1/3	2/3	5
1	x_2	0	1	0	-1/6	1/6	3/2
0	x_3	0	0	1	1/2	1/2	1/2
Z_j		5	1	0	3/2	7/2	53/2
$Z_j - C_j$		0	0	0	3/2	7/2	-

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

DOĞRUSAL PROGRAMLAMA
DUAL SİMPLEKS ÇÖZÜM YÖNTEMİ

Prof.Dr. Ünal H. ÖZDEN

Açıklama

- Simpleks yöntemin tekrarlı bir hesaplama yöntemi olduğundan ve hesaplama işlemlerini başlatabilmek için bir *başlangıç temel uygun çözümün* belirlenmesinin zorunludur.

- Açıklamaların ortaya koyduğu gibi dual simpleks yöntem, en iyi olmakla birlikte uygun olmayan başlangıç çözümünün söz konusu olduğu doğrusal programlama problemlerine uygulanır.

Aşamaları

- Başlangıçtaki temel çözümün uygun olup olmadığının incelenmesi için öncelikle (≤) biçiminde olmayan kısıtlayıcı fonksiyonların (≤) biçimine dönüştürülmesi gerekir.

1. *Başlangıç çözümünün en iyi olup olmadığının incelenmesi*:Başlangıç çözümü en iyi ise buna karşılık gelen dual çözüm uygun olduğundan, ikinci adıma geçilir. Aksi halde işlemlere son verilir.

Aşamaları-devam

2. *Çözüm vektörü elemanlarının incelenmesi*: Çözüm vektörü elemanlarının tümü ≥ 0 ise, yürürlükteki en iyi çözüm aynı zamanda uygun olduğundan, işlemlere son verilir. Çözüm vektörü elemanlarının bir ya da birkaçı negatif ise çözümün uygun olmaması koşulu sağlandığından üçüncü adıma geçilir.
3. *Temeli terkedecek değişkenin belirlenmesi*: Temeli terkedecek değişkenin belirlenmesinde kullanılan ölçüt temeldeki değişkenlerin çözüm değerlerine dayanır. Temeli terkedecek değişken en yüksek negatif (mutlak değerce en büyük negatif sayı) çözüm değerine sahip olan değişkendir. Bu değişkenin bulunduğu satır anahtar satırdır.

Aşamaları-devam

4. *Temele girecek değişkenin belirlenmesi*: Seçim işlemi için temel olmayan değişkenlere karşılık gelen Z_j - C_j değerleri, anahtar satırın kendilerine karşılık gelen elemanlarına bölünerek oranlar hesaplanır. Sıfır veya pozitif paydaya sahip oranlar dikkate alınmazlar. Bu oranlar arasından mutlak değerce en küçük oranın bulunduğu sütun anahtar sütundur. Bu yolla anahtar sayının negatif, dolayısıyla temele giren değişkenin çözüm değerinin pozitif olması sağlanır. Tüm oranların sıfır veya pozitif paydalara sahip olması durumunda işlemlere son verilir. Böyle bir durumda çözüm vektörünün ilgili elemanı tekrar negatif değerli bulunacağından uygun çözüme ulaşılamaz.

Aşamaları-devam

5. *Gelişmiş çözümün aranması*: Temele giren ve temeli terkeden değişkenlerin belirlenmesinden sonra simpleks yöntemin bilinen işlemleriyle daha gelişmiş bir çözüm elde edilerek tekrar ikinci adıma dönülür. Bu yolla uygun bir en iyi çözüm varsa sonlu sayıda işlemle bu çözüme ulaşılır.

- Yukarıda açıklandığı gibi, primal simpleks yöntemde önce anahtar sütun sonra anahtar satır belirlenirken, dual simpleks yöntemde önce anahtar satır sonra anahtar sütun belirlenmektedir.

Örnek

Örnek 6.1: Aşağıdaki doğrusal programlama problemini dual simpleks yöntemle çözünüz.

$$Z_{enk} = 3x_1 + 2x_2 + x_3$$

$$2x_1 + 3x_2 + x_3 \geq 21$$

$$x_1 + x_2 + x_3 \geq 12$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Çözüm

Çözüm 6.1: Problemi dual simpleks yöntemin uygulanacağı biçime dönüştürmek için önce (≥) işaretli kısıtlayıcı fonksiyonların her iki tarafını (-1) ile çarparak (≤) biçimine dönüştürürelim. Bu işlemin tamamlanmasıyla problem aşağıdaki gibi olur.

$$Z_{enk} = 3x_1 + 2x_2 + x_3$$

$$-2x_1 - 3x_2 - x_3 \leq -21$$

$$-x_1 - x_2 - x_3 \leq -12$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Çözüm-devam

- Kısıtlayıcı fonksiyonlara sırasıyla x_4 ve x_5 aylak değişkenlerini ekleyerek onları eşitlik biçiminde yazalım. Buna göre problemin standart biçimi aşağıdaki gibi elde edilir.

$$Z_{enk} = 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 0x_4 + 0x_5$$

$$-2x_1 - 3x_2 - x_3 + x_4 \qquad = -21$$

$$-x_1 - x_2 - x_3 + x_5 \qquad = -12$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

Çözüm-devam

Tablo 6.1

Dual Simpleks Başlangıç Çözüm Tablosu

TDV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	ÇV
0 x_4	-2	**-3**	-1	1	0	-21
0 x_5	-1	-1	-1	0	1	-12
Z_j	0	0	0	0	0	0
$Z_j - C_j$	-3	-2	-1	0	0	-

Tüm $Z_j - C_j \leq 0$ olduğundan, başlangıç tablosundaki çözüm en iyidir. Ancak, temel değişkenler negatif değerli olduklarından anılan çözüm primal uygun değildir.

Çözüm vektörü elemanlarından en küçüğü (-21) x_4'e ait olduğundan, x_4 temelden çıkartılacaktır.

Çözüm-devam

Oranların hesaplanması işlemi aşağıda gösterilmiştir.

x_1'e karşılık gelen oran = -3/-2 = 3/2

x_2'ye karşılık gelen oran = -2/-3 = 2/3

x_3'e karşılık gelen oran = -1/-1 = 1

En küçük oran (2/3) x_2'ye ait olduğundan, x_2 temele girecektir. x_4 değişken satırı anahtar satır, x_2 değişken sütunu anahtar sütun olduğundan, anahtar sayı (-3) olur. Simpleks yöntemin bilinen işlemlerinin uygulanmasıyla, yeni çözüm tablosu aşağıdaki gibi elde edilir.

Çözüm-devam

- Buna göre x_4 değişken satırı anahtar satır olur. x_4 yerine temele girecek değişkeni belirlemek için temel olmayan değişkenlere ait Z_j - C_j değerlerinin bire bir olmak koşuluyla anahtar satır elemanlarına bölünmesi gerekir.

Tablo 6.3

Dual Simpleks Birinci Çözüm Tablosu

TDV		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	ÇV
2	x_2	2/3	1	1/3	-1/3	0	7
0	x_5	-1/3	0	**-2/3**	-1/3	1	-5
Z_j		4/3	0	2/3	-2/3	0	14
$Z_j - C_j$		-5/3	0	-1/3	-2/3	0	-

Tablo 6.4

Dual Simpleks İkinci (En İyi) Çözüm Tablosu

TDV		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	ÇV
2	x_2	1/2	1	0	-1/2	1/2	9/2
1	x_3	1/2	0	1	1/2	-3/2	15/2
Z_j		3/2	2	1	-1/2	-1/2	33/2
$Z_j - C_j$		-3/2	0	0	-1/2	-1/2	-

Ödev

Örnek 6.2: Aşağıdaki problemi dual simpleks yöntemle çözünüz.

$$Z_{enk} = 2x_1 + 2x_2$$

$$-x_1 + x_2 \leq 4$$

$$x_1 + 2x_2 \geq 5$$

$$3x_1 + 4x_2 \leq 6$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Dezavantajları

- Anahtar satırın tüm elemanları sıfır veya pozitif olduğundan, temele girecek değişkenin pozitif olmasının sağlanması çabaları sonuçsuz kalacağından, işlemlere son verilir en iyi çözümün bulunmadığı kararlaştırılır. Dual simpleks yöntemle ulaşılan en iyi çözümün dışındaki çözümlerin hiçbirisi primal problem için uygun değildir. Bu nedenle, herhangi bir sebepten ötürü dual simpleks yöntemden vazgeçilmesi durumunda o ana kadar harcanan emek ve zaman boşa gitmiş olur. Çünkü, böyle bir durumda en iyi olmak bir yana uygun bir çözüm bile yoktur. Bu, dual simpleks yöntemin önemli bir sakıncası sayılmaktadır.

- Oysa, primal simpleks yöntem uygulamasında elde edilen çözümler, en azından uygun çözümlerdir. Çözümün herhangi bir aşamasında işlemlere son vermek gerektiğinde, hiç olmazsa o ana kadar elde edilmiş olan uygun çözümlerin en iyisi elde edilmiş olacağından, herhangi bir problemin hem primal hem de dual uygun temelleri varsa primal simpleks yöntemin tercih edilmesi gerekir.

- Bununla birlikte, dual simpleks yöntem duyarlılık çözümlemelerinde son derecede yararlıdır. Duyarlılık çözümlemesi konusundan bilindiği gibi, kısıtlayıcı fonksiyonların sağ taraf sabitlerinin değişmesi sonucunda primal problemin en iyi çözümü uygun olma özelliğini yitirebilir. Bunun yanında, problemin orijinal kısıtlayıcılarına yeni kısıtlayıcıların eklenmesi yürürlükteki çözümün uygun olma koşulunun sağlanmamasına yol açabilir. Bu durumda, dual simpleks yöntem problemin en iyi çözümünün elde edildiği aşamadan başlayarak yeni bir çözümün elde edilmesinde kullanılabilir. Bütün bunlardan başka dual simpleks yöntem yapay değişken kullanmayı gerektirmediğinden, hesaplamalarda kolaylık sağlamaktadır.

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

DOĞRUSAL PROGRAMLAMA
DUALİTE KURAMI VE DUYARLILIK ANALİZİ

Prof.Dr. Ünal H. ÖZDEN

- Her DP modelinin bir primal problemi ve bir de dual problemi vardır.
- Primal ve dual arasındaki ilişkilerin belli başlıcaları aşağıda açıklanmıştır.
- *1*. Dual problemin duali primal problemi verir.
- *2*. Eğer primal ve dual problemlerin çözümleri varsa, primal problemin (en küçükleme) amaç fonksiyonunun herhangi bir uygun çözümdeki değeri dual problemin (en büyükleme) amaç fonksiyonunun bir uygun çözümdeki değerine eşit veya ondan daha büyüktür. Bunun tersi de doğrudur. Bu önermeye *zayıf dualite önermesi* denir.

- *3*. Primal veya dual problemlerden herhangi birinin en iyi çözümü varsa, diğerinin de en iyi çözümü vardır ve primal ile dual problemlerinin amaç fonksiyonlarının en iyi değerleri birbirine eşittir. Bu önermeye *temel dualite önermesi* denir.
- *4*. Primal problem sınırsız çözüme sahipse, dual problemin uygun çözümü yoktur.
- *5*. Primal problemin uygun bir çözümü yoksa, dual problem sınırsız çözüme sahiptir.

Primal-Dual

Primal	Dual
$Z_{enb} = x_1 + 4x_2 + 5x_3$ $x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 2$ $3x_1 + x_2 + x_3 \leq 2$ $2x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 4$ $x_1, x_2, x_3 \geq 0$	$Z'_{enk} = 2y_1 + 2y_2 + 4y_3$ $y_1 + 3y_2 + 2y_3 \geq 1$ $2y_1 + y_2 + 3y_3 \geq 4$ $3y_1 + y_2 + y_3 \geq 5$ $y_1, y_2, y_3 \geq 0$

Primal	Dual
$Z_{enb} = 25x_1 + 30x_2 + 12x_3$ $5x_1 + 5x_2 + x_3 \leq 12$ $x_1 \leq 3$ $x_1, x_2, x_3 \geq 0$	$Z'_{enk} = 12y_1 + 3y_2$ $5y_1 + y_2 \geq 25$ $5y_1 \geq 30$ $y_1 \geq 12$ $y_1, y_2 \geq 0$

Primal	Dual
$Z_{enb} = 12x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 4x_4$ $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 21$ $x_1 + 2x_2 = 10$ $2x_3 + 3x_4 = 5,$ $x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$	$Z'_{enk} = 21y_1 + 10y_2 + 5y_3$ $y_1 + y_2 \geq 12$ $y_1 + 2y_2 \geq 5$ $y_1 + 2y_3 \geq 6$ $y_1 + 3y_3 \geq 4$ y_1, y_2, y_3 işaretleri sınırlandırılmamış değişkenlerdir

Primal	Dual
$Z_{enk} = 3x_1 + 4x_2 + 6x_3 + x_4 + 5x_5$ $x_1 + x_2 + x_4 = 10$ $x_2 + x_3 = 7$ $x_3 + x_4 = 8$ $x_1 + x_5 = 6$ $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$	$Z'_{enb} = 10y_1 + 7y_2 + 8y_3 + 6y_4$ $y_1 + y_4 \leq 3$ $y_1 + y_2 \leq 4$ $y_2 + y_3 \leq 6$ $y_1 + y_3 \leq 1$ $y_4 \leq 5$ y_1, y_2, y_3, y_4 işaretleri sınırlandırılmamış değişkenlerdir.

Primal	Dual
$Z_{enb} = 6x_1 + 16x_2 + 26x_3 + 36x_4$ $2x_1 + 3x_2 + x_4 \leq 16$ $2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 8$ x_1, x_2, x_3, x_4 işaretçe sınırlandırılmamış değişkenlerdir.	$Z'_{enk} = 16y_1 + 8y_2$ $2y_1 + 2y_2 = 6$ $3y_1 + y_2 = 16$ $y_2 = 26$ $y_1 + y_2 = 36$ $y_1, y_2 \geq 0$

Primal	Kanonik Biçim
$Z_{enk} = 6x_1 + 7x_2 + 3x_3$ $2x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 5$ $x_1 + x_2 + 6x_3 = 12$ $3x_1 + 3x_2 + 4x_3 \geq 15$ $x_1, x_2, x_3 \geq 0$	$Z^{*}_{enb} = -6x_1 - 7x_2 - 3x_3$ $2x_1 + x_3 + 3x_3 \leq 5$ $x_1 + x_2 + 6x_3 \leq 12$ $-x_1 - x_2 - 6x_3 \leq -12$ $-3x_1 - 3x_2 - 4x_3 \leq -15$ $x_1, x_2, x_3 \geq 0$
Dual Biçim	Dual Biçim
y_1, y_2^+, y_2^-, y_3 kanonik biçimin kısıtlayıcılarına karşılık gelen dual değişkenler olsun. Buna göre, y_1, y_2^+, y_2^-, $y_3 \geq 0$ koşulu altında dual model aşağıdaki gibi olur. $Z'_{enk} = 5y_1 + 12(y_2^+ - y_2^-) - 15y_3$ $2y_1 + (y_2^+ - y_2^-) - 3y_3 \geq -6$ $y_1 + (y_2^+ - y_2^-) - 3y_3 \geq -7$ $3y_1 + 6(y_2^+ - y_2^-) - 4y_3 \geq -3$	y_2^+, $y_2^- \geq 0$ olmak üzere $y_2^+ - y_2^- = y_2$ olarak tanımlandığında elde edilen dual model aşağıda gösterilmiştir. $Z'_{enk} = 5y_1 + 12y_2 - 15y_3$ $2y_1 + y_2 - 3y_3 \geq -6$ $y_1 + y_2 - 3y_3 \geq -7$ $3y_1 + 6y_2 - 4y_3 \geq -3$ y_1, $y_3 \geq 0$, y_2 işareti sınırlandırılmamış

Örnek

Aşağıda verilen DP probleminin (Prima) en iyi çözümünü ve bu problemin dualinin en iyi çözümünü simpleks yöntemi ile bulunuz.

Amaç fonksiyonu

$$Z_{enk} = 35x_1 + 30x_2 + 60x_3 + 50x_4 + 27x_5 + 22x_6$$

Kısıtlayıcı fonksiyonlar

$$x_1 + 0x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 1x_5 + 2x_6 \geq 9$$

$$0x_1 + 1x_2 + 3x_3 + 1x_4 + 3x_5 + 2x_6 \geq 19$$

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 1x_5 + 1x_6 \geq 21$$

Negatif olmama koşulları

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$$

Çözüm

Primal Problem Simpleks Başlangıç Çözüm Tablosu

TDV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	A_1	A_2	A_3	ÇV
M A_1	1	0	2	2	1	2	-1	0	0	1	0	0	9
M A_2	0	1	3	1	3	2	0	-1	0	0	1	0	19
M A_3	1	2	2	3	1	1	0	0	-1	0	0	1	21
Z_j	2M	3M	7M	6M	5M	5M	-M	-M	-M	M	M	M	49M
$Z_j - C_j$	2M-35	3M-30	7M-60	6M-50	5M-27	5M-22	-M	-M	-M	0	0	0	-

Primal Problemin En İyi Çözüm Tablosu

TDV	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	A_1	A_2	A_3	ÇV
x_7	-5/3	0	2/3	-8/3	7/3	0	1	-4/3	2/3	-1	4/3	-2/3	7/3
x_2	2/3	1	1/3	5/3	-1/3	0	0	1/3	-2/3	0	-1/3	2/3	23/3
x_6	-1/3	0	4/3	-1/3	5/3	0	0	-2/3	1/3	0	2/3	-1/3	17/3
Z_j	38/3	30	118/3	128/3	80/3	1	0	-14/3	-38/3	0	14/3	38/3	1064/3
Z_j - C_j	-67/3	0	-62/3	-22/3	-1/3	0	0	-14/3	-38/3	-M	$\frac{14-3M}{3}$	$\frac{38-3M}{3}$	-

Çözüm

Dual Problem

$$Z'_{enb} = 9y_1 + 19y_2 + 21y_3$$

$$\begin{aligned}
y_1 \qquad\qquad + \; y_3 &\leq 35 \\
y_2 + 2y_3 &\leq 30 \\
2y_1 + 3y_2 + 2y_3 &\leq 60 \\
2y_1 + y_2 + 3y_3 &\leq 50 \\
y_1 + 3y_2 + y_3 &\leq 27 \\
2y_1 + 2y_2 + y_3 &\leq 22 \\
y_1, y_2, y_3 &\geq 0
\end{aligned}$$

Çözüm

Dual Problemin Simpleks Başlangıç Çözüm Tablosu

TDV		y_1	y_2	Y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	y_8	y_9	ÇV
0	y_4	1	0	1	1	0	0	0	0	0	35
0	y_5	0	1	2	0	1	0	0	0	0	30
0	y_6	2	3	2	0	0	1	0	0	0	60
0	y_7	2	1	3	0	0	0	1	0	0	50
0	y_8	1	3	1	0	0	0	0	1	0	27
0	y_9	2	2	1	0	0	0	0	0	1	22
Z_j		0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$Z_j - C_j$		-9	-19	-21	0	0	0	0	0	0	-

Çözüm

Dual Problemin En İyi Çözüm Tablosu

TDV		y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	y_8	y_9	ÇV
0	y_4	5/3	0	0	1	-2/3	0	0	0	1/3	67/3
21	y_3	-2/3	0	1	0	2/3	0	0	0	-1/3	38/3
0	y_6	-2/3	0	0	0	-1/3	1	0	0	-4/3	62/3
0	y_7	8/3	0	0	0	-5/3	0	1	0	1/3	22/3
0	y_8	-7/3	0	0	0	1/3	0	0	1	-5/3	1/3
19	y_2	4/3	1	0	0	-1/3	0	0	0	2/3	14/3
Z_j		34/3	19	21	0	23/3	0	0	0	17/3	1064/3
$Z_j - C_j$		7/3	0	0	0	23/3	0	0	0	17/3	-

Çözüm

Primal ve Dual Problemlerin En İyi Çözümleirinin Karşılaştırılması

- Primal ve dual problemlerin amaç fonksiyonlarının en iyi değerleri birbirine eşittir (Z_{enb} = = 1064/3).
- İlk olarak primal problemin başlangıç çözümünde temelde bulunan değişkenler ile bu değişkenlerin en iyi çözüm tablosundaki Z_j - C_j değerlerini inceleyelim.

Pirimalin Başlangıç Temel Değişkenleri	A_1	A_2	A_2
Z_j - C_j	-M	(14/3) - M	(38/3) - M
Karşılık Gelen Dual Değişken	y_1	y_2	y_3

Benzer inceleme dual problemin en iyi çözüm tablosunun esas alınmasıyla da yapılabilir. İlk olarak dual problemin başlangıç çözümünün temelinde bulunan değişkenler ile bunların en iyi çözüm tablosundaki Z_j - C_j değerlerini belirleyelim.

Dualin Başlangıç Temel Değişkenler	y_4	y_5	y_6	y_7	y_8	y_9
Z_j - C_j	0	23/3	0	0	0	17/3
Karşılık Gelen Primal Değişken	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6

Duyarlılık Çözümlemesi

- Duyarlılık çözümlemesi modelin bir veya birkaç parametresindeki herhangi bir değişikliğin en iyi çözümde yol açabileceği değişmelerin belirlenmesinde yardımcı olur. Duyarlılık çözümlemesiyle farklı koşullarda en iyi çözümün nasıl olacağı da belirlenebilmektedir. Çıkabilecek değişiklikler şunlardır:
- *1*. Kısıtlayıcı fonksiyonların sağ taraf sabitlerinin değişmesi.
- *2*. Amaç fonksiyonu katsayılarının değişmesi.
- *3*. Kısıtlayıcı fonksiyonların sol taraf katsayılarının değişmesi.
- *4*. Probleme yeni bir değişken eklenmesi.
- *5*. Probleme yeni bir kısıtlayıcı fonksiyon eklenmesi.

- Bu değişiklikler sonucunda ortaya çıkabilecek durumlar aşağıda açıklanmıştır.
- *1*. En iyi çözüm hiç değişmez. Yani, temel değişkenler ve en iyi değerleri aynı kalır.
- *2*. Temel değişkenler aynı kalır fakat değerleri değişebilir.
- *3*. En iyi çözüm tamamen değişir.

Örnek

$$Z_{enb} = 3x_1 + 4x_2 + 5x_3$$

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 12$$

$$2x_1 + 4x_2 + 6x_3 \leq 10$$

$$x_1 \leq 2$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Tablo 5.10

Primal Problemin Simpleks Başlangıç Çözüm Tablosu

TDV		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	ÇV
0	x_4	1	2	3	1	0	0	12
0	x_5	2	4	6	0	1	0	10
0	x_6	1	0	0	0	0	1	2
Z_j		0	0	0	0	0	0	0
Z_j - C_j		-3	-4	-5	0	0	0	-

Tablo 5.13
Primal Problem En İyi Çözüm Tablosu

TDV		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	ÇV
0	x_4	0	0	0	1	-1/2	0	7
4	x_2	0	1	3/2	0	1/4	-1/2	3/2
3	x_1	1	0	0	0	0	1	2
Z_j		3	4	6	0	1	1	12
$Z_j - C_j$		0	0	1	0	1	1	-

- ***Özellik1***: Simpleks çözümünün herhangi bir aşamasında temelde bulunan değişkenlerin çözüm (vektörü) değerleri, **B** matrisi ile kısıtlayıcı fonksiyonların sağ taraflarındaki sabitlerin oluşturduğu sütun vektörün (**b**) çarpımına eşittir.

$$\begin{bmatrix} x_4 \\ x_2 \\ x_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1/4 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 12 \\ 10 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 3/2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Özellik2: Simpleks çözümün herhangi bir tekrarında, herhangi bir değişkenin tablodaki katsayılarından oluşan sütun vektör, o aşamadaki **B** matrisi ile dikkate alınan değişkenin başlangıç tablosundaki katsayılarından oluşan sütun vektörün çarpımına eşittir.

Bu durumda, sözgelimi x_1 değişken sütununun birinci simpleks tablosundaki katsayıları aşağıdaki gibi hesaplanacaktır.

$$\begin{bmatrix} 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 1/6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Amaç Fonksiyonu Katsayılarındaki Değişmeler

- ***Durum 1. Temel değişken vektöründeki değişkenlerin katsayılarındaki değişmeler***
- ***Durum 2. Temel olmayan değişken vektöründe olmayan değişkenlerin katsayılarındaki değişmeler***
- ***Durum 3. TDV'de olan ve TDV'de olmayan değişken katsayılarının birlikte değişmesi***

Teknoloji Matrisindeki Değişmeler

- ***Durum 1. TDV'de olmayan değişken katsayılarının değişmesi***
- ***Durum 2. TDV'deki değişken katsayılarının değişmesi***: Temel değişkenlere ait teknoloji katsayılarının değişmesi doğrudan **B** matrisini etkiler ve onun değişmesine neden olur. Bu gibi durumlarda problemi yeniden çözmek daha uygun olabilir.

Probleme Yeni Bir Değişken Eklenmesi

- $[B].X_e$

Probleme Yeni Bir Kısıtlayıcı Eklenmesi

- $2x_1 + 3x_2 + 7x_3 \leq 15$

Tablo 5.18
Primal Problemin Değiştirilmiş En İyi Simpleks Çözüm Tablosu

TDV		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	ÇV
0	x_4	0	0	0	1	-1/2	0	0	7
4	x_2	0	1	3/2	0	1/4	-1/2	0	3/2
3	x_1	1	0	0	0	0	1	0	2
	x_7	2	3	7	0	0	0	1	6
	Z_j	3	4	6	0	1	1	0	12
	$Z_j - C_j$	0	0	1	0	1	1	0	-

x_1, x_2 ve x_4 temelde bulunduklarından, bu değişkenlerin yeni kısıtlayıcı fonksiyonda karşılık bulunan elemanlarının sıfıra eşit olması gerekir. Dikkat edilirse, x_4'e karşılık gelen değeri sıfır olmakla birlikte x_1 ve x_2'ye karşılık gelen değerler sırasıyla 2 ve 3'dür. Bu iki değerin uygun satır işlemleriyle sıfıra dönüştürülmesi gerekmektedir. Bunun için, sırasıyla x_1 değişkeni satır elemanlarının (-2), x_2 değişkeni satır elemanlarının (-3) ile çarpılması ve x_7 değişken satır elemanlarına eklenmesi yeterli olacaktır. Bu işlemin ardından elde edilen tablo aşağıda gösterilmiştir.

Tablo 5.19

Primal Problemin Değiştirilmiş En İyi Çözüm Tablosu

TDV		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	ÇV
0	x_4	0	0	0	1	-1/2	0	0	7
4	x_2	0	1	3/2	0	1/4	-1/2	0	3/2
3	x_1	1	0	0	0	0	1	0	2
0	x_7	0	0	5/2	0	-3/2	-1/2	1	-5/2
Z_j		3	4	6	0	1	1	0	12
Z_j - C_j		0	0	1	0	1	1	0	-

Yukarıdaki tablodan görüldüğü gibi, çözüm en iyi olmakla birlikte temelde bulunan x_7 değişkeninin negatif değerli oluşu çözümün uygun olmadığına işaret etmektedir. Bunun için x_7 temelden çıkartılmalıdır. Dual problem dikkate alındığında, x_5 ve x_6'nın çözüme girmeye aday değişkenler olduğu anlaşılır. Kural gereği (bkz. dual simpleks yöntem) x_5'in temele girmesi kararlaştırılacak ve simpleks yöntemin bilinen işlemleriyle yeni en iyi çözüm elde edilecektir.

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

DOĞRUSAL PROGRAMLAMA
ULAŞTIRMA PROBLEMLERİ

Prof.Dr. Ünal H. ÖZDEN

Tarihçe ve Tanım

- Doğrusal programlama probleminin özel bir biçimi olan ulaştırma problemi ve çözümü ilk olarak 1941 yılında Frank L. Hitchcock tarafından önerilmiş, Tjalling C. Koopmans (1947) tarafından geliştirilmiştir. Konu ile ilgili asıl gelişme simpleks yöntemin ulaştırma problemlerine uygulanmasından sonra olmuştur. Ulaştırma probleminin doğrusal programlama problemi biçiminde modellenmesi ve simpleks yöntemle çözülmesi ilk olarak Dantzig tarafından gerçekleştirilmiştir. İkinci Dünya Savaşı sırasında Amerika Birleşik Devletleri'nin askeri faaliyetlerini planlamak amacıyla uygulanan ulaştırma modeli, savaştan sonra da endüstride ulaşım, mal ve hizmet dağıtımının planlanması, işletmelerin kuruluş yeri seçimi, personelin işe yerleştirilmesi gibi hem iktisadi hem de sosyal problemlerin çözümünde yaygın biçimde kullanılmaya başlanmıştır.
- Sunum merkezlerindeki (fabrika, depo vb.) malların istem merkezlerine dağıtımının planlanması ***ulaştırma problemi*** olarak adlandırılır.

Ulaştırma Modellerinin Varsayımları

- *DP modellerinin varsayılarına ek olarak,*

1. Probleme konu olan mal ve hizmetlerin aynı birimle açıklanmaları, yani homojen olmaları gerekir. Bu koşula *homojenlik koşulu* denir.

2. Belirli sayıdaki sunum merkezinde dağıtılmak üzere bekleyen mal miktarları ile belirli sayıdaki istem merkezlerinin bu mala olan istem miktarlarının kesin olarak bilinmesi gerekir. Ayrıca sunum miktarları toplamı ile istem miktarları toplamı eşit olmalı veya bu eşitlik kuramsal olarak sağlanmalıdır. Toplam istem ile toplam sunumun eşitliğini ileri süren bu koşula *tutarlılık koşulu* denir. Tutarlılık koşulunun sağlandığı ulaştırma problemlerinin *dengeli* veya *standart* oldukları kabul edilir.

3. Sunum merkezleri ile istem merkezleri arasında aktarma yapılması söz konusu değildir. Bu, malların sunum merkezlerinden istem merkezlerine doğrudan taşınması demektir.

Bazı durumlarda malın, bulunduğu kaynak noktalarından aktarılacağı esas noktalara doğrudan taşınması ekonomik olmayabilir. Dağıtım işleminde, malların önce bazı transfer noktalarına daha sonra esas istem merkezlerine nakledilmesi daha ekonomik olabilir. Bu tip ulaştırma problemlerine *aktarmalı* veya *konaklamalı ulaştırma problemi* denir.

4. Herhangi bir sunum merkezinden herhangi bir istem merkezine bir birim mal taşımanın yol açtığı maliyetin sabit olması gerekir. Kısacası, taşıma maliyetleri doğrusal nitelikli amaç fonksiyonunun özelliklerine uymaktadır.

Ulaştırma Modellerinin Yapısal Görünümü

*1. **Amaç Fonksiyonu***

$Z = C_{11}x_{11} + C_{12}x_{12} + \ldots + C_{1n}x_{1n} + C_{21}x_{21} + C_{22}x_{22} + \ldots + C_{2n}x_{2n}$
$+ \ldots + C_{m1}x_{m1} + C_{m2}x_{m2} + \ldots + C_{mn}x_{mn}$

*2. **Kısıtlayıcı Fonksiyonlar***

Arz (Sunum) Kısıtları

$x_{11} + x_{12} + \ldots + x_{1n} = a_1$

$x_{21} + x_{22} + \ldots + x_{2n} = a_2$

………………..

$x_{m1} + x_{m2} + \ldots + x_{mn} = a_m$

Talep (İstem) Kısıtları

$x_{11} + x_2 + \ldots + x_{m1} = b_1$

$x_{12} + x_{22} + \ldots + x_{m2} = b_2$

$x_{1n} + x_{2n} + \ldots + x_{mn} = b_n$

olarak yazılabilir.

*3. **Negatif Olmama Koşulu***

$x_{ij} \geq 0 \qquad i = 1, 2, \ldots, m; \quad j = 1, 2, \ldots, n$

biçiminde açıklanır.

m = Sunum merkezi sayısı (i = 1, 2, ..., m)

n = İstem merkezi sayısı (j = 1, 2, ..., n)

C_{ij} = i sunum merkezinden j istem merkezine bir birim malın taşınması maliyeti

x_{ij} = i sunum merkezinden j istem merkezine taşınan mal miktarı

a_i = i sunum merkezinin sunum miktarı

b_j = j istem merkezinin istem miktarı

Ulaştırma Tablosu

Tablo 7.1
Ulaştırma Modeli Tablosu

Sunum Merkezi	İstem Merkezi						Sunum Miktarı a_i
	İM_1	İM_2	-------	İM_j	-------	İM_n	
SM_1	x_{11} C_{11}	x_{12} C_{12}	-------	x_{1j} C_{1j}	-------	x_{1n} C_{1n}	a_1
SM_2	x_{21} C_{21}	x_{22} C_{22}	-------	x_{2j} C_{2j}	-------	x_{2n} C_{2n}	a_2
¦	¦	¦	¦	¦	¦	¦	¦
SM_i	x_{i1} C_{i1}	x_{i2} C_{i2}	-------	x_{ij} C_{ij}	-------	x_{in} C_{in}	a_i
¦	¦	¦	¦	¦	¦	¦	¦
SM_m	x_{m1} C_{m1}	x_{m2} C_{m2}	-------	x_{mj} C_{mj}	-------	x_{mn} C_{mn}	a_m
İstem Miktarı b_j	b_1	b_2	-------	b_j	-------	b_m	$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$

- Toplam sunumun toplam isteme eşit olmadığı durumdaki ulaştırma modeline *dengeli olmayan* ulaştırma problemi denir. Ulaştırma problemlerinin çözümü için önerilen özel yöntemlerin uygulanabilmeleri bu eşitliğin sağlanmasına bağlıdır.
- Doğrusal programlama ilkelerine göre formüle edilen bir ulaştırma problemi, çok sık olarak, hatta her zaman, bir tablo biçiminde sunulur. *Ulaştırma modeli tablosu* veya kısaca *ulaştırma tablosu* adı verilen tablo (bkz. Tablo 7.1) problemle ilgili tüm bilgileri ve malların sunum merkezlerinden istem merkezlerine nasıl taşındığını açıkça göstermektedir.

Örnek-1

Örnek 7.1: Güven AŞ değişik yerlerdeki dört fabrikasında deterjan üretmektedir. Satışlarını değişik bölgelerde bulunan dört ana depo ile sağlayan işletme yönetiminin temel sorunu, deterjanın fabrikalardan satış depolarına ulaşımını sağlarken karşılaştığı yüksek tutarlardaki taşıma giderleridir.

Malların fabrikalardan satış depolarına gönderilirken katlanılması gereken birim ulaştırma maliyetleri aşağıdaki gibi belirlenmiştir. Öte yandan, fabrika 1, 2, 3 ve 4'ün aylık üretim kapasiteleri sırasıyla, 50, 200, 150 ve 300 ton'dur. Depoların istemleri, depo 1, 2, 3 ve 4 için sırasıyla 150, 75, 175 ve 300 ton olarak belirlenmiştir. Buna göre,

a. Problemin dengeli olup olmadığını belirtiniz.

b. Ulaştırma tablosunu düzenleyiniz.

c. Problemin matematiksel modelini kurunuz.

	Depo			
Fabrika	D_1	D_2	D_3	D_4
F_1	3	5	7	10
F_2	6	8	13	5
F_3	4	2	6	7
F_4	12	9	4	10

Çözüm 7.1

Çözüm 7.1**: **a. Problemin dengeli olup olmadığını belirlemek için, tutarlılık koşulunun sağlanıp sağlanmadığının kontrol edilmesi gerekir. Bunun için öncelikle, fabrikaların üretim miktarları toplamı (toplam sunum) ile depoların ihtiyaç duydukları ürün miktarları toplamını (toplam istem) hesaplayalım.

Toplam sunum = 50 + 200 + 150 + 300 = 700 ton

Toplam istem = 150 + 75 + 175 + 300 = 700 ton

İstem-sunum eşitliğinin sağlanması problemin dengeli olduğunu göstermektedir.

b. Düzenlenen ulaştırma modeli tablosu aşağıda gösterilmiştir.

Tablo 7.2
Problem 7.1'in Ulaştırma Modeli Tablosu

Fabrika	Depo 1	Depo 2	Depo 3	Depo 4	Sunum a_i
1	3 x_{11}	5 x_{12}	7 x_{13}	10 x_{14}	50
2	6 x_{21}	8 x_{22}	13 x_{23}	5 x_{24}	200
3	4 x_{31}	2 x_{32}	6 x_{33}	7 x_{34}	150
4	12 x_{41}	9 x_{42}	4 x_{43}	10 x_{44}	300
İstem b_i	150	75	175	300	700 = 700

Çözüm 7.1

c. Amaç, en küçük toplam ulaştırma maliyetini belirlemek olduğuna göre,

x_{11}: Fabrika 1'den depo 1'e taşınan deterjan miktarı

x_{12}: Fabrika 1'den depo 2'ye taşınan deterjan miktarı

x_{33}: Fabrika 3'den depo 3'e taşınan deterjan miktarı

. ...

x_{43}: Fabrika 4'den depo 3'e taşınan deterjan miktarı

x_{44}: Fabrika 4'den depo 4'e taşınan deterjan miktarı

olarak tanımlandığında, modelin amaç fonksiyonu aşağıdaki gibi yazılır.

$Z_{enk} = 3x_{11} + 5x_{12} + 7x_{13} + 10x_{14} + 6x_{21} + 8x_{22} + 13x_{23}$
$+ 5x_{24} + 4x_{31} + 2x_{32} + 6x_{33} + 7x_{34} + 12x_{41} + 9x_{42} + 4x_{43} + 10x_{44}$

Her bir fabrikadan gönderilecek deterjan miktarı o fabrikanın üretim miktarına eşit olacağına göre,

$$\left.\begin{aligned} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} &= 50 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} &= 200 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} &= 150 \\ x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} &= 300 \end{aligned}\right\} \text{Sunum kısıtlayıcıları}$$

Diğer taraftan, her satış deposunun ürün gereksiniminin tam olarak karşılanması istendiğinden,

$$\left.\begin{aligned} x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} &= 150 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} &= 75 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} &= 175 \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} &= 300 \end{aligned}\right\} \text{İstem kısıtlayıcıları}$$

yazılmasıyla, kısıtlayıcı fonksiyonların tanımlanması işlemi tamamlanmış olur. Son olarak negatif taşıma olmayacağına göre,

$x_{ij} \geq 0 \quad (i = 1, 2, 3, 4; \;\; j = 1, 2, 3, 4)$

yazılacak, böylece problem ulaştırma modeli olarak formüllenmiş olacaktır.

Çözüm Yöntemleri

1. Kuzey-Batı Yöntemi
2. Satır Yaklaşımı
3. Sütun Yaklaşımı
4. Genel Yaklaşım
5. VAM Yöntemi
6. RAM Yöntemi

Kuzey-Batı Yöntmi Örnek-2

Örnek 7.2: Bulaşık makinesi üreticisi Alet AŞ'nin değişik yerlerde dört fabrikası vardır. İşletme, satışlarını değişik yerlerdeki dört deposu ile yapmaktadır. İşletme yönetiminin temel sorunu, makineleri depolara en küçük maliyetle taşımaktır. Fabrikaların üretim kapasiteleri, depoların istem miktarları ve birim ulaştırma maliyetleri aşağıdaki ulaştırma tablosunda gösterilmiştir. Başlangıç çözümünü ve bu çözüme ilişkin toplam ulaştırma maliyetini bulunuz.

Tablo 7.3
Problem 7.2'nin Başlangıç Tablosu

Fabrika	Depo				Sunum a_i
	1	2	3	4	
1	4	3	4	5	40
2	6	8	5	8	60
3	3	4	5	5	40
4	1	2	3	4	50
İstem b_j	55	25	50	60	190 = 190

Çözüm-2

Çözüm 7.2: Ulaştırma problemlerinin modellenmesine ilişkin bir örnek daha olması bakımından önce problemin matematiksel modelini kuralım.

x_{ij}, i (i = 1, 2, 3, 4) fabrikasından j (j = 1, 2, 3, 4) satış deposuna gönderilen makine sayısını göstersin. Buna göre, amaç fonksiyonu aşağıdaki gibi yazılacaktır.

$Z_{enk} = 4x_{11} + 3x_{12} + 4x_{13} + 5x_{14} + 6x_{21} + 8x_{22} + 5x_{23} + 8x_{24} + 3x_{31} + 4x_{32} + 5x_{33} + 5x_{34} + 1x_{41} + 2x_{42} + 3x_{43} + 4x_{44}$

Kısıtlayıcı fonksiyonlar,

$$\left.\begin{aligned} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} &= 40 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} &= 60 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} &= 40 \\ x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} &= 50 \end{aligned}\right\} \quad \text{Sunum kısıtlayıcıları}$$

$$\left.\begin{aligned} x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} &= 55 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} &= 25 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} &= 50 \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} &= 60 \end{aligned}\right\} \quad \text{İstem kısıtlayıcıları}$$

olarak formüle edilir.

Negatif taşıma söz konusu olmadığına göre,

$x_{ij} \geq 0 \qquad i = 1, 2, 3, 4; \quad j = 1, 2, 3, 4$

yazılmasıyla model kurulmuş olur.

Çözüm-2

Tablo 7.4
7.2. Problemin Kuzey-Batı Köşesi Yöntemiyle Belirlenen Başlangıç Çözümü

Fabrika	Depo				Sunum a_i
	1	2	3	4	
1	4 40	3	4	5	40
2	6 15	8 25	5 20	8	60
3	3	4	5 30	5 10	40
4	1	2	3	4 50	50
İstem b_j	55	25	50	60	190 = 190

Çözüme ilişkin toplam maliyetin bulunması için, temel değişken değerlerinin ait oldukları gözelere ilişkin birim taşıma maliyetleriyle çarpımlarının toplanması gerekir. Buna göre toplam maliyet aşağıdaki gibi hesaplanacaktır.

Fabrika	Depo	Miktar (Adet)	Maliyet (TL)
F_1	D_1	40	40 x 4 = 160
F_2	D_1	15	15 x 6 = 90
F_2	D_2	25	25 x 8 = 200
F_2	D_3	20	20 x 5 = 100
F_3	D_3	30	30 x 5 = 150
F_3	D_4	10	10 x 5 = 50
F_4	D_4	50	50 x 4 = 200
		TOPLAM	950

Satır Yaklaşımı Örnek-3

Örnek 7.2: Bulaşık makinesi üreticisi Alet AŞ'nin değişik yerlerde dört fabrikası vardır. İşletme, satışlarını değişik yerlerdeki dört deposu ile yapmaktadır. İşletme yönetiminin temel sorunu, makineleri depolara en küçük maliyetle taşımaktır. Fabrikaların üretim kapasiteleri, depoların istem miktarları ve birim ulaştırma maliyetleri aşağıdaki ulaştırma tablosunda gösterilmiştir. Başlangıç çözümünü ve bu çözüme ilişkin toplam ulaştırma maliyetini bulunuz.

Tablo 7.3
Problem 7.2'nin Başlangıç Tablosu

Fabrika	Depo				Sunum a_i
	1	2	3	4	
1	4	3	4	5	40
2	6	8	5	8	60
3	3	4	5	5	40
4	1	2	3	4	50
İstem b_j	55	25	50	60	190 = 190

Çözüm 3

Tablo 7.6

7.2. Problemin Satır Yaklaşımıyla Elde Edilen Başlangıç Çözümü

Fabrika	Depo 1	Depo 2	Depo 3	Depo 4	Sunum a_i
1	4 15	3 25	4	5	40
2	6 10	8	5 50	8	60
3	3 30	4	5	5 10	40
4	1	2	3	4 50	50
İstem b_j	55	25	50	60	190 = 190

Çözümün toplam maliyeti aşağıdaki gibi hesaplanacaktır.

Fabrika	Depo	Miktar (Adet)	Maliyet (TL)
F_1	D_1	15	15 x 4 = 60
F_1	D_2	25	25 x 3 = 75
F_2	D_1	10	10 x 6 = 60
F_2	D_3	50	50 x 5 = 250
F_3	D_1	30	30 x 3 = 90
F_3	D_4	10	10 x 5 = 50
F_4	D_4	50	50 x 4 = 200
		TOPLAM	785

Toplam 7 gözeye dağıtım yapıldığından, ulaşılan başlangıç çözümü temel çözümdür. Taşıma yapılan (dolu) gözelere karşılık gelen karar değişkenleri ve değerleri şöyledir:

$x_{11} = 15$, $x_{12} = 25$, $x_{21} = 10$, $x_{23} = 50$, $x_{31} = 30$, $x_{34} = 10$, $x_{44} = 50$

Bu başlangıç temel uygun çözüme ait maliyetin bulunması için, temel değişken değerlerinin ait oldukları gözelere ilişkin birim taşıma maliyet-leriyle çarpımlarının toplanması gerekir.

Sütun Yaklaşımı Örnek-4

Örnek 7.2: Bulaşık makinesi üreticisi Alet AŞ'nin değişik yerlerde dört fabrikası vardır. İşletme, satışlarını değişik yerlerdeki dört deposu ile yapmaktadır. İşletme yönetiminin temel sorunu, makineleri depolara en küçük maliyetle taşımaktır. Fabrikaların üretim kapasiteleri, depoların istem miktarları ve birim ulaştırma maliyetleri aşağıdaki ulaştırma tablosunda gösterilmiştir. Başlangıç çözümünü ve bu çözüme ilişkin toplam ulaştırma maliyetini bulunuz.

Tablo 7.3

Problem 7.2'nin Başlangıç Tablosu

Fabrika	Depo				Sunum a_i
	1	2	3	4	
1	4	3	4	5	40
2	6	8	5	8	60
3	3	4	5	5	40
4	1	2	3	4	50
İstem b_j	55	25	50	60	190 = 190

Çözüm 4

Tablo 7.8
7.2. Problemin Sütun Yaklaşımıyla Bulunan Başlangıç Çözümü

Fabrika	Depo 1	Depo 2	Depo 3	Depo 4	Sunum a_i
1	4	3 / 25	4 / 15	5	40
2	6	8	5 / 35	8 / 25	60
3	3 / 5	4	5	5 / 35	40
4	1 / 50	2	3	4	50
İstem b_j	55	25	50	60	190 = 190

Tablo 7.8'den görüldüğü gibi ulaşılan çözüm temel (temel değişken sayısı = 7 olduğundan) uygun bir çözümdür. Çözüme ilişkin toplam maliyet aşağıdaki gibi hesaplanmıştır.

Fabrika	Depo	Miktar (Adet)	Maliyet (TL)
F_1	D_2	25	25 x 3 = 75
F_1	D_3	15	15 x 4 = 60
F_2	D_3	35	35 x 5 = 175
F_2	D_4	25	25 x 8 = 200
F_3	D_1	5	5 x 3 = 15
F_3	D_4	35	35 x 5 = 175
F_4	D_1	50	50 x 1 = 50
		TOPLAM	750

Genel Yaklaşımı Örnek-5

Örnek 7.2: Bulaşık makinesi üreticisi Alet AŞ'nin değişik yerlerde dört fabrikası vardır. İşletme, satışlarını değişik yerlerdeki dört deposu ile yapmaktadır. İşletme yönetiminin temel sorunu, makineleri depolara en küçük maliyetle taşımaktır. Fabrikaların üretim kapasiteleri, depoların istem miktarları ve birim ulaştırma maliyetleri aşağıdaki ulaştırma tablosunda gösterilmiştir. Başlangıç çözümünü ve bu çözüme ilişkin toplam ulaştırma maliyetini bulunuz.

Tablo 7.3
Problem 7.2'nin Başlangıç Tablosu

Fabrika	Depo				Sunum a_i
	1	2	3	4	
1	4	3	4	5	40
2	6	8	5	8	60
3	3	4	5	5	40
4	1	2	3	4	50
İstem b_j	55	25	50	60	190 = 190

Çözüm 5

Tablo 7.9

7.2. Problemin Genel Yaklaşımla Bulunan Başlangıç Çözümü

Fabrika	Depo 1	Depo 2	Depo 3	Depo 4	Sunum a_i
1	[4]	[3] 25	[4] 15	[5]	40
2	[6]	[8]	[5] 35	[8] 25	60
3	[3] 5	[4]	[5]	[5] 35	40
4	[1] 50	[2]	[3]	[4]	50
İstem b_j	55	25	50	60	190 = 190

Kolayca kontrol edilebileceği gibi, aynı zamanda uygun olan bu çözüme ilişkin toplam maliyet, önceden olduğu gibi temel değişken değerlerinin kendilerine karşılık gelen birim ulaştırma maliyetlerinin karşılıklı çarpımlarının toplanmasıyla aşağıdaki gibi hesaplanacaktır.

Fabrika	Depo	Miktar (Adet)	Maliyet (TL)
F_1	D_2	25	25 x 3 = 75
F_1	D_3	15	15 x 4 = 60
F_2	D_3	35	35 x 5 = 175
F_2	D_4	25	25 x 8 = 200
F_3	D_1	5	5 x 3 = 15
F_3	D_4	35	35 x 5 = 175
F_4	D_1	50	50 x 1 = 50
		TOPLAM	750

VAM Yöntemi

Türkçedeki adını, İngilizce ***Vogel's Approximation Method*** kelimelerinin ilk harflerinden alan bu yöntem, William R. Vogel tarafından 1958'de ileri sürülmüştür. Yöntemin en önemli özelliği, genellikle en iyi çözüme en yakın hatta en iyi çözümü başlangıçta vermesidir.

Yöntem aşağıda açıklanan aşamaların adım adım izlenmesi ile uygulanır.

1. Birim ulaştırma maliyetlerinin oluşturduğu matrisin her bir satır ve her bir sütunundaki en düşük maliyetli iki C_{ij} maliyet katsayısı saptanır.

2. Birinci adımda belirlenen C_{ij}'ler arasındaki farklar hesaplanır. Satır C_{ij}'leri için hesaplanan fark değerleri tabloya eklenen bir ek satıra, sütun C_{ij}'leri için hesaplanan fark değerleri tabloya eklenen bir ek sütuna yazılır. Bu farklar en düşük maliyetli gözenin kullanılmaması durumunda katlanılacak fazla harcamayı, yani bir çeşit cezayı ifade ettiklerinden bunlara birim ceza (penaltı) değerleri de denir. Bu nedenle VAM yöntemi *birim penaltı yöntemi* olarak da bilinir.

3. İkinci adımda hesaplanan (m + n) fark değerlerinden en büyük olanı saptanır.

4. En büyük değerli farkın ortaya çıktığı satır veya sütunun en düşük maliyetli gözesi belirlenir. Bu gözeye satır ve sütun koşullarına uygun olarak en yüksek miktardaki dağıtım yapılır. Yapılan bu dağıtım miktarı, ilgili satır ve sütun toplamlarından çıkartılır. Dağıtım yapılan gözenin işaret ettiği istem merkezinin istemi tam olarak karşılanmış ya da sunum merkezinin sunumu bütünüyle dağıtılmış ise, o sunum merkezi veya istem merkezi (duruma göre her ikisi birden) bir sonraki dağıtım işleminde devre dışı bırakılır.

VAM Yöntemi -devam

5. Dağıtım yapılan satır veya sütunun (veya her ikisinin birden) devre dışı bırakılması ve sunum ile istem merkezlerinin sunum-istem miktarlarının yeniden ayarlanmasıyla yeni bir tablo düzenlenir.

6. Düzenlenen bu yeni tabloda satır veya sütun sayısı bire690 ininceye değin 1-5 nolu işlemler sırasıyla izlenerek yinelenir.

En büyük fark değerleri birbirine eşit olabilir. Bu durumda, dağıtım işlemi bunlardan herhangi birinin rasgele seçilmesiyle sürdürülebilir. Ancak, bu durumda en iyi çözüme ulaşmak için gerekli işlem sayısı artabilir.

Aşağıdaki kurallara uyulması durumunda bu tehlike ortadan kalkar.

- En büyük fark iki ya da daha fazla satırda (ya da sütunda) ortaya çıkarsa, en büyük a_i (ya da b_j) değerli satırdaki (ya da sütundaki) en düşük maliyetli göze seçilir.

- En büyük fark bir satır ve bir sütunda aynı anda ortaya çıkarsa ve söz konusu satır ile sütunun kesiştiği yerdeki gözenin maliyeti en düşük ise dağıtım için bu göze seçilir.

Söz konusu gözeye ilişkin maliyet en düşük değilse, ilgili satır ya da sütunun en düşük maliyetli gözesi seçilir.

Örnek 6

Örnek 7.2: Bulaşık makinesi üreticisi Alet AŞ'nin değişik yerlerde dört fabrikası vardır. İşletme, satışlarını değişik yerlerdeki dört deposu ile yapmaktadır. İşletme yönetiminin temel sorunu, makineleri depolara en küçük maliyetle taşımaktır. Fabrikaların üretim kapasiteleri, depoların istem miktarları ve birim ulaştırma maliyetleri aşağıdaki ulaştırma tablosunda gösterilmiştir. Başlangıç çözümünü ve bu çözüme ilişkin toplam ulaştırma maliyetini bulunuz.

Tablo 7.3
Problem 7.2'nin Başlangıç Tablosu

Fabrika	Depo				Sunum a_i
	1	2	3	4	
1	4	3	4	5	40
2	6	8	5	8	60
3	3	4	5	5	40
4	1	2	3	4	50
İstem b_j	55	25	50	60	190 = 190

Çözüm 6

Tablo 7.10

7.2. Problemin VAM (Birinci Deneme) Çözümü

Fabrika	Depo 1	Depo 2	Depo 3	Depo 4	Sunum a_i	Satır Farkları
1	4	3	4	5	40	1
2	6	8	5	8	60	1
3	3	4	5	5	40	1
4	1 (50)	2	3	4	50	1
İstem b_j	55	25	50	60	190 = 190	
Sütun Farkları	2	1	1	1		

Tablo 7.11

7.2. Problemin VAM (İkinci Deneme) Çözümü

Fabrika	Depo 1	Depo 2	Depo 3	Depo 4	Sunum a_i	Satır Farkları
1	4	3 (25)	4	5	40	1
2	6	8	5	8	60	1
3	3	4	5	5	40	1
İstem b_j	5	25	50	60	140 = 140	
Sütun Farkları	1	1	1	0		

Çözüm 6

Tablo 7.12

7.2. Problemin VAM (Üçüncü Deneme)Çözümü

Fabrika	Depo 1	Depo 3	Depo 4	Sunum a_i	Satır Farkları
1	[4]	[4]	[5]	15	0
2	[6]	[5]	[8]	60	1
3	5 [3]	[5]	[5]	40	2
İstem b_j	5	50	60	115 = 115	
Sütun Farkları	1	1	0		

Tablo 7.13

7.2. Problemin VAM (Dördüncü Deneme) Çözümü

Fabrika	Depo 3	Depo 4	Sunum a_i	Satır Farkları
1	[4]	[5]	15	1
2	50 [5]	[8]	60	3
3	[5]	[5]	35	0
İstem b_j	50	60	110 = 110	
Sütun Farkları	1	0		

Çözüm 6

Tablo 7.14
7.2. Problemin VAM (Beşinci Deneme) Çözümü

Fabrika	Depo 4	Sunum a_i
1	15 [4]	15
2	10 [5]	10
3	35 [5]	35
İstem b_j	60	60 = 60

Tablo 7.15
7.2. Problemin VAM Yöntemiyle Bulunan Başlangıç Çözümü

Fabrika	Depo 1	Depo 2	Depo 3	Depo 4	Sunum a_i
1	[4]	25 [3]	[4]	15 [5]	40
2	[6]	[8]	50 [5]	10 [8]	60
3	5 [3]	[4]	[5]	35 [5]	40
4	50 [1]	[2]	[3]	[4]	50
İstem b_j	55	25	50	60	190 = 190

Çözüm 6

Uygun dağıtımlarla hem satır hem de sütun gerekleri karşılandığından, tablodaki çözüm uygundur. Bu uygun çözümde bulunan temel değişkenler ve bu değişkenlerin değerleri: $x_{12} = 25$, $x_{14} = 15$, $x_{23} = 50$, $x_{24} = 10$, $x_{31} = 5$, $x_{34} = 35$ ve $x_{41} = 50$ olarak belirlenmiştir. Temel değişken sayısı 7 olduğundan bu çözüm de, önceki çözümler gibi temel çözüm olup toplam maliyet 720 TL olarak hesaplanmıştır.

Fabrika	Depo	Miktar (Adet)	Maliyet (TL)
F_1	D_2	25	25 x 3 = 75
F_1	D_4	15	15 x 5 = 75
F_2	D_3	50	50 x 5 = 250
F_2	D_4	10	10 x 8 = 80
F_3	D_1	5	5 x 3 = 15
F_3	D_4	35	35 x 5 = 175
F_4	D_1	50	50 x 1 = 50
		TOPLAM	720

Özet

Aynı problemi, değişik yöntemlele çözerek farklı maliyetler hesaplamış bulunuyoruz. Altı farklı yöntemle elde edilen maliyetler aşağıda topluca gösterilmiştir.

Çözüm Yöntemi	Maliyet (TL)
Kuzey-batı köşesi	950
Satır yaklaşımı	785
Sütun yaklaşımı	750
Genel yaklaşım	750
VAM	720

En İyi Çözümün Elde Edilmesi

Modi Testi

En iyi çözümün araştırılmasında kullanılan başka bir yaklaşım da göze değiştirme yönteminin geliştirilmiş bir biçimi sayılan *modi yöntemidir*. İki yöntem arasındaki en önemli fark, boş gözelerin değerlendirilmesinde kullandıkları yaklaşımdır. Bilindiği gibi, göze değiştirme yönteminde temele girecek değişkenin belirlenmesi için bütün boş gözelerin gizli maliyetlerinin hesaplanması gerekmektedir. Bunun için boş göze sayısı kadar çevrim oluşturmak gerekmekte bu ise küçük boyutlu problemler de bile çok zaman alıcı ve yorucu olabilmektedir. Esas olarak göze değiştirme yönteminin yukarıda açıklanan sakıncasını gidermek amacıyla geliştirilen bu yöntemde, gizli maliyetler çevrim yapılmaksızın hesaplanabilmekte, çevrim ancak çözüm en iyi değilse tek bir boş göze için yapılmaktadır. Bu yolla, en iyi olan çözüme ulaşmada, göze değiştirme yöntemindekinden çok daha az işlem yeterli olmaktadır.

Modi Testi

Modi yönteminde yapılması gereken ilk işlem, U_i ve V_j olarak gösterilen dual değişken değerlerinin hesaplanmasıdır. U_i ve V_j değerlerinin hesaplanmasında, dolu gözelerden yararlanılır. $(U_i + V_j)$ toplamının dolu gözelerdeki C_{ij} katsayısına eşit olması gerekir. U_i ve V_j olarak $(m + n)$ bilinmeyene karşılık $(m + n - 1)$ temel değişken, dolayısıyla $(m + n - 1)$ denklem vardır. Bilinmeyen sayısı, denklem sayısından bir fazla olduğu için U_i veya V_j'lerden keyfi olarak seçilen bir tanesine rasgele bir değer (genellikle sıfır) verip kalanlar hesaplanabilir.

U_i ve V_j değerlerinin belirlenmesinden sonra boş gözelerin gizli maliyetlerinin hesaplanması gerekir. Gizli maliyetler,

$$d_{ij} = C_{ij} - (U_i + V_j)$$

bağıntısından hesaplanır. Gizli Maliyet için üç olası durum söz konusudur.

•$d_{ij} > 0$ ise, bu gözenin doldurulması toplam maliyeti artıracağından, söz konusu gözenin boş bırakılmasına karar verilir.

•$d_{ij} < 0$ ise, bu gözenin doldurulması toplam maliyeti azaltacağından, hali hazırda boş olan gözenin doldurulmasına karar verilir.

•$d_{ij} = 0$ ise, bu gözenin doldurulmasıyla ulaşılacak toplam maliyet bir önceki toplam maliyete eşit olacağından, alternatif çözümlerden söz edilir.

Modi Testi

- Gizli maliyetlerden bir ya da birkaçı negatif değerli ise eldeki çözümün en iyi olmadığı kararlaştırılır.
- İlk önce hangi negatif değerli boş gözeye dağıtım yapılması gerektiğine karar verirken, mutlak değerce en büyük negatif gizli maliyetin hesaplandığı boş gözeden başlamak doğru olur. Boş göze seçiminin tamamlanmasından sonra göze değiştirme yönteminde olduğu gibi, boş göze başlangıç noktası olmak üzere, uygun dolu gözeler kullanılarak kapalı bir çevrim oluşturulur ve gözeler arasında mal aktarmaları yapılarak yeni bir taşıma programı belirlenir.
- Aktarmalardan sonra elde edilen yeni çözümün temel olup olmadığının belirlenmesinden sonra, U_i ve V_j değerleri yeniden hesaplanır. Yukarıdaki işlemler en iyi çözüme ulaşılıncaya değin tekrarlanır.
- 7.2. problemin VAM yöntemiyle belirlenen başlangıç çözümünün en iyi olup olmadığını bir kez de modi yöntemiyle kontrol edelim. Böylece, hem işlemlerin doğruluğunu kontrol etmiş hem de farklı iki yöntem arasındaki farkı incelemiş oluruz. Söz konusu çözümün verildiği 7.22 nolu tablodan görüldüğü gibi, F_1D_2, F_1D_4, F_2D_3, F_2D_4, F_3D_1, F_3D_4, F_4D_1 dolu gözelerdir. Bu nedenle, bu gözelerden hareketle dual değişkenlerin (U_i ve V_j) değerlerinin hesaplanması gerekecektir

Modi Testi

Tablo 7.22
7.2. Problemin VAM Yöntemiyle Belirlenen Başlangıç Çözümü

Fabrika	Depo 1 $V_1 = 3$	2 $V_2 = 3$	3 $V_3 = 2$	4 $V_4 = 5$	Sunum a_i
1 $U_1 = 0$	4	3 25	4	5 15	40
2 $U_2 = 3$	6	8	5 50	8 10	60
3 $U_3 = 0$	3 5	4	5	5 35	40
4 $U_4 = -2$	1 50	2	3	4	50
İstem b_j	55	25	50	60	190 = 190

Tablo 7.22'de depo ve fabrika numaralarının altında gösterilen U_i ve V_j değerleri ile gizli maliyetlerin hesaplanmasına ilişkin aritmetik işlemler aşağıda topluca gösterilmiştir. Dual değişkenlerin değerlerini hesaplamak için

$U_i + V_j = C_{ij}$

formulü kullanılır.

U_1'e sıfır değerini verelim. Buna göre,

1. $U_1 = 0, \quad 0 + V_2 = 3 \quad \Rightarrow \quad V_2 = 3$ olur.

2. $U_1 = 0, \quad 0 + V_4 = 5 \quad \Rightarrow \quad V_4 = 5$ olur.

4. $V_4 = 5, \quad U_2 + 5 = 8 \quad \Rightarrow \quad U_2 = 3$ olur.

3. $U_2 = 3, \quad 3 + V_3 = 5 \quad \Rightarrow \quad V_3 = 2$ olur.

6. $V_4 = 5, \quad U_3 + 5 = 5 \quad \Rightarrow \quad U_3 = 0$ olur.

5. $U_3 = 0, \quad 0 + V_1 = 3 \quad \Rightarrow \quad V_1 = 3$ olur.

7. $V_1 = 3, \quad U_4 + 3 = 1 \quad \Rightarrow \quad U_4 = -2$ olur.

Şimdi de gizli maliyetleri hesaplayalım.

<u>Boş Gözelerin Gizli Maliyetleri</u>:

F_1D_1: $d_{11} = C_{11} - (U_1 + V_1) = 4 - (0 + 3) = 1$

F_1D_3: $d_{13} = C_{13} - (U_1 + V_3) = 4 - (0 + 2) = 2$

F_2D_1: $d_{21} = C_{21} - (U_2 + V_1) = 6 - (3 + 3) = 0$

F_2D_2: $d_{22} = C_{22} - (U_2 + V_2) = 8 - (3 + 3) = 2$

F_3D_2: $d_{32} = C_{32} - (U_3 + V_2) = 4 - (0 + 3) = 1$

F_3D_3: $d_{33} = C_{33} - (U_3 + V_3) = 5 - (0 + 2) = 3$

F_4D_2: $d_{42} = C_{42} - (U_4 + V_2) = 2 - (-2 + 3) = 1$

F_4D_3: $d_{43} = C_{43} - (U_4 + V_3) = 3 - (-2 + 2) = 3$

F_4D_4: $d_{44} = C_{44} - (U_4 + V_4) = 4 - (-2 + 5) = 1$

Kolayca kontrol edilebileceği gibi tüm gizli maliyetler ≥ 0 olduğundan, VAM'la ulaşılan başlangıç çözümü problemin en iyi çözümüdür.

Ulaştırma Prob. Karşılaşılan Özel Durumlar

- ***Bozulma Durumu***
- Bilindiği gibi, ulaştırma problemlerinin herhangi bir yöntemle ulaşılan uygun çözümünde temel değişken sayısı (k), satır ve sütun sayıları toplamının bir eksiğine eşitse, başka bir deyişle $k = m + n - 1$ bağıntısı geçerliyse ulaşılan çözüm temel, yani bozuk olmayan bir çözümdür. Diğer taraftan, bir ulaştırma probleminin başlangıç çözümünde veya en iyi çözüme ulaşma çabalarının herhangi bir adımında temel değişken sayısı $(m + n - 1)$'den farklıysa *bozulma durumu* ortaya çıkmış demektir. Bu duruma iki şekilde rastlanır.
- 1. Temel değişken sayısı (k), $(m + n - 1)$'den büyüktür. $(k > m + n - 1)$ yalnızca başlangıç çözümünde seyrek olarak rastlanır. Bu durumun ortaya çıkmasının nedeni, dağıtımın yanlış yapılması veya problemin yanlış formüle edilmesidir. Bu sorunun üstesinden gelebilmek için modelin ve çözümün kontrol edilmesi gerekir.
- 2. Temel değişken sayısı (k), $(m + n - 1)$'den küçüktür. İkinci duruma $(k < m + n - 1)$, başlangıç çözümünde veya en iyi çözüme ulaşma sürecinin herhangi bir tekrarında rastlanabilir. Kuşkusuz, her iki durum da bozulma durumudur ve giderilmesi gerekir. Bozulmayı gidermek için çok basit bir teknik kullanılır. Bu tekniği açıklamadan önce bozulmanın neden giderilmesi gerektiği konusu üzerinde duralım.

Bozulma Durumu Örnek

Örnek 7.3: Kuzey-batı köşesi yöntemiyle belirlenen ve aşağıdaki tabloda gösterilen başlangıç çözümünün en iyi olup olmadığını göze değiştirme ve modi yöntemine göre ayrı ayrı belirleyiniz. Çözüm en iyi değilse en iyi çözümü bulunuz.

Tablo 7.23
Kuzey-Batı Köşesi Yöntemiyle Belirlenen Başlangıç Çözümü

Fabrika	Depo 1	Depo 2	Depo 3	Sunum a_i
1	30 [2]	[3]	[5]	30
2	[3]	60 [5]	[7]	60
3	[3]	20 [6]	80 [8]	100
İstem b_j	30	80	80	190 = 190

Bozulma Durumu Örnek

Tablo 7.23
Kuzey-Batı Köşesi Yöntemiyle Belirlenen Başlangıç Çözümü

Fabrika	Depo 1		Depo 2		Depo 3		Sunum a_i
1	30	2	ε	3		5	30
2		3	60	5		7	60
3		3	20	6	80	8	100
İstem b_j	30		80		80		190 = 190

Bozulma Durumu Örnek

- Modi Testi Yapılacak

Bozulma Durumu Örnek

- Aktarma yapılacak

Toplam Arzın Toplam Talepden Büyük Olması

Örnek 3.11: Bir firma dört fabrikasında ürettiği ürünleri, üç deposuna taşımaktadır. Fabrikaların aylık üretim kapasiteleri sırasıyla 40, 60, 50 ve 100 birimdir. Depoların aylık depolama kapasiteleri birbirine eşit olup 70 birimdir. Taşıma maliyetleri, $C_{11} = 3$, $C_{12} = 4$, $C_{13} = 10$, $C_{21} = 5$, $C_{22} = 10$, $C_{23} = 8$, $C_{31} = 7$, $C_{32} = 6$, $C_{33} = 2$, $C_{41} = 9$, $C_{42} = 8$, $C_{43} = 3$ olarak verilmiştir.

Kuzey-batı köşesi yöntemiyle başlangıç temel uygun çözümü bulunuz ve elde ettiğiniz çözümün en iyiliğini modi yöntemiyle test ediniz.

Çözüm 3.11:

Tablo 3.24

Fabrika	Depo 1 $V_1 = 3$	Depo 2 $V_2 = 8$	Depo 3 $V_3 = 4$	Depo 4 (HD) $V_4 = 1$	Sunum a_i
1 $U_1 = 0$	(-) 3 40	4 (+)	10	0	40
2 $U_2 = 2$	5 30 (+)	10 30 (-)	8	0	60
3 $U_3 = -2$	7	6 40	2 10	0	50
4 $U_4 = -1$	9	8	3 60	0 40	100
İstem b_i	70	70	70	40	250 = 250

Toplam Talebin Toplam Arzdan Büyük Olması

Örnek 3.12: Bir firma üç fabrikasında ürettiği ürünleri dört büyük deposuna taşımaktadır. Fabrikaların haftalık üretim kapasiteleri sırasıyla 100, 60 ve 140 birimdir. Depoların haftalık mal gereksinimleri ise sırasıyla 75, 80, 100 ve 145 birimdir. Taşıma maliyetleri, $C_{11} = 6$, $C_{12} = 9$, $C_{13} = 10$, $C_{14} = 4$, $C_{21} = 3$, $C_{22} = 5$, $C_{23} = 7$, $C_{24} = 9$, $C_{31} = 3$, $C_{32} = 2$, $C_{33} = 10$, $C_{34} = 4$ olarak verilmiştir. Başlangıç tablosunu düzenleyerek VAM'la bulduğunuz başlangıç çözümünü modi yöntemiyle test ediniz. **Çözüm 3.12**:

Tablo 3.26

Fabrika	Depo 1 $V_1 = 3$	Depo 2 $V_2 = 2$	Depo 3 $V_3 = 4$	Depo 4 $V_4 = 4$	Sunum a_i
1 $U_1 = 0$	6	9	10	(100) 4	100
2 $U_2 = 0$	(60) 3	5	7	9	60
3 $U_3 = 0$	(15) 3	(80) 2	10	(45) 4	140
HF $U_4 = -4$	0	0	(100) 0	(0) 0	100
İstem b_i	75	80	100	145	400 = 400

Alternatif En İyi Çözümlerin Bulunması

Örnek 3.13: Üç fabrika, dört depolu bir ulaştırma probleminin başlangıç tablosu ve VAM'la elde edilen başlangıç temel uygun çözümü Tablo 3.27'de gösterilmiştir. Bu çözümün en iyi olup olmadığını inceleyerek varsa diğer en iyi çözümleri bulunuz.

Tablo 3.27

Fabrika	Depo 1 $V_1 = 3$	Depo 2 $V_2 = 5$	Depo 3 $V_3 = 6$	Depo 4 $V_4 = 3$	Sunum a_i
1 $U_1 = 0$	3; 75	5; (-) 225	6; 100 (+)	7	400
2 $U_2 = -1$	10	4; (+)	5; 250 (-)	2; 100	350
3 $U_3 = -2$	1; 150	7	8	12	150
İstem b_i	225	225	350	100	900 = 900

Alternatif En İyi Çözümlerin Bulunması

Çözüm 3.13: Gizli maliyetlerin hesaplanmasında kullanılan U_i ve V_j değerleri Tablo 3.27'de, bu değerlerin kullanılmasıyla d_{ij} değerlerinin hesaplanması işlemleri aşağıda gösterilmiştir.

$d_{14} = C_{14} - (U_1 + V_4) = 7 - (0 + 3) = 4$

$d_{21} = C_{21} - (U_2 + V_1) = 10 - (-1 + 3) = 8$

$d_{22} = C_{22} - (U_2 + V_2) = 4 - (-1 + 5) = 0$

$d_{32} = C_{32} - (U_3 + V_2) = 7 - (-2 + 6) = 3$

$d_{33} = C_{33} - (U_3 + V_3) = 8 - (-2 + 6) = 4$

$d_{34} = C_{34} - (U_3 + V_4) = 12 - (-2 + 3) = 11$

Bütün d_{ij}'ler ≥ 0 olduğundan çözüm en iyidir. Bu çözümde $x_{11} = 75$, $x_{12} = 225$, $x_{13} = 100$, $x_{23} = 250$, $x_{24} = 100$, $x_{41} = 150$, $Z_{enk} = 3550$'ye eşittir. Ayrıca $d_{22} = 0$ olduğu için problemin alternatif en iyi çözümü vardır. Alternatif en iyi çözümü bulmak için x_{22} değişkeni temele alınmalıdır. Bunun için (2, 2) gözesinin esas alınmasıyla bir çevrim oluşturulur.

Alternatif En İyi Çözümlerin Bulunması

- En büyükleme amaçlı bir ulaştırma probleminin çözümünde iki yaklaşım izlenebilir. Bu yaklaşımlar aşağıda açıklanmıştır.
- 1. En büyükleme amaçlı bir doğrusal programlama problemi en küçükleme problemi olarak veya bunun karşıtı, en küçükleme amaçlı bir doğrusal programlama problemi en büyükleme problemi olarak çözülebilir. Bunun için, amaç fonksiyonu katsayılarının işaretlerinin değiştirilmesi yeterli olur.
- 2. En büyükleme amaçlı bir ulaştırma problemi, en iyilemenin anlamını değiştirmeksizin de bilinen yöntemlerle ve aynı süreç izlenerek çözülebilir. Bunun için öncelikle, kâr katsayılarından oluşan başlangıç tablosunun düzenlenmesi gerekir. Daha sonra, başlangıç çözümünün belirlenmesi amacıyla geliştirilen yöntemlerden herhangi birisiyle çözüme başlanır.

Alternatif En İyi Çözümlerin Bulunması

- En büyükleme amaçlı ulaştırma problemlerinin çözümü ile en küçükleme amaçlı ulaştırma problemlerinin çözümü arasındaki en önemli fark, dağıtım yapılacak gözelerin belirlenmesinde ortaya çıkmaktadır. En küçükleme problemlerinde, en küçük maliyetler esas alınarak çözüme ulaşılırken, en büyükleme problemlerinde en yüksek kâr katsayıları esas alınır. Sözgelimi, başlangıç çözümü VAM'la elde edilmek istendiğinde, satır ve sütunlara ilişkin farkların hesaplanmasında en yüksek iki kâr katsayısı dikkate alınır ve bunlar arasındaki farklar hesaplanır. Daha sonra, en yüksek farkın bulunduğu satır ya da sütunun en yüksek kar katsayılı gözesine dağıtım yapılır. Bu işlem, en küçükleme problemlerinde olduğu gibi, tek bir satır ya da tek bir sütun kalıncaya kadar sürdürülür.
- Elde edilen başlangıç çözümünün en iyi olup olmadığının belirlenmesinde ve buna bağlı olarak en iyi çözümün elde edilmesinde modi veya göze değiştirme yöntemi kullanılabilir. Ancak, problem en büyükleme olduğundan artık hesaplananlar gizli maliyetler değil gizli kârlardır. Bu nedenle, en küçükleme problemindeki durumun tersine, gizli kârların hepsi sıfır ya da negatifse en iyi çözümün elde edildiği kararlaştırılır. Çözüm en iyi değilse işlemler en küçükleme probleminde olduğu gibi aynı sırayla tekrarlanır.

YÖNEYLEM ARAŞTIRMASI

DOĞRUSAL PROGRAMLAMA
ATAMA PROBLEMLERİ

Prof.Dr. Ünal H. ÖZDEN

Atama Problemleri

- Atama modeli, ulaştırma modelinin basit ve özel bir biçimidir. Ulaştırma problemlerinde olduğu gibi atama problemlerinde de amaç, belirli merkezler arasındaki dağıtım işlemlerinin en uygun biçimde gerçekleştirilmesidir. Ancak, atama probleminin mal taşınması ile doğrudan bir ilişkisi genellikle yoktur. Atama modellerine daha çok işlerin makinelere, işçilerin işlere, uçuşların uçuş hatlarına, kişilerin kişilere vb. atanmalarının programlanmasında başvurulur. Programlama, bir işçi bir işe veya bir makine bir işe atanacak şekilde, yani bire bir eşleme ile gerçekleştirilir.
- Her model gibi atama modeli de bazı varsayımlara dayanmaktadır. Daha önce açıklandığı gibi, ulaştırma probleminde $(m > n)$ veya $(m < n)$ olabildiği halde atama probleminde $(m = n)$ olması gerekir. Bunun sonucunda, ulaştırma modeli katsayılar (C_{ij}) matrisi kare matris şeklinde ortaya çıkar ve *atama matrisi* (bkz. Tablo 7.44) adıyla anılır. Atama matrisinin kare matris olması bire bir eşlemenin doğal bir sonucudur ve atama modelinin çok önemli bir özelliğidir.
- Tablo 7.44'ün sütunlarını sayıları n olan işler, satırlarını m sayıdaki makineler, elemanlarını ise bire bir eşlemelerin ortaya koyduğu sonuçlar (C_{ij}) oluşturur.

Atama Tablosu

Tablo 7.44
Atama Modeli Tablosu

Makine	İş						Sunum
	$İ_1$	$İ_2$	⋯	$İ_j$	⋯	$İ_n$	
M_1	C_{11}	C_{12}	⋯	C_{1j}	⋯	C_{1n}	1
M_2	C_{21}	C_{22}	⋯	C_{2j}	⋯	C_{2n}	1
.	.	.	.	.	.	.	1
M_i	C_{i1}	C_{i2}	⋯	C_{ij}	⋯	C_{in}	1
.	.	.	.	.	.	.	1
M_m	C_{m1}	C_{m2}	⋯	C_{mj}	⋯	C_{mn}	1
İstem	1	1	1	1	1	1	$m = n$

$m = n$ koşulunun sağlanmadığı atama modeli *standart olmayan* veya *dengesiz* atama modelleri kapsamına girer. Standart olmayan bir atama probleminin çözülebilmesi için modelin standart biçime dönüştürülmesi, yani $m = n$ olmasının sağlanması gerekir. Bunun için, dengesiz bir ulaştırma probleminin dengelenmesinde kullanılan yönteme benzer bir yöntem kullanılır. Sözgelimi, makine sayısından daha fazla sayıda işe sahip olduğumuzu düşünelim. Bu durumda bazı işler yapılamayacaktır. Bunu engellemek için modele fazla olan iş sayısı kadar makine eklenmesi gerekir. Eklenen makinelere karşılık gelen C_{ij}'ler sıfır kabul edilir. Bunun tersi olarak, makine sayısı fazla ise bu makinelerin görevlendirileceği sayıda işin modele eklenmesi zorunludur.

Atama Problerinin Çözüm Yöntemleri

Herhangi bir atama problemi, olanaklı tüm atamaların (bire bir eşlemelerin) listelenmesiyle çözülebilir. Ancak bu yaklaşım yalnızca küçük boyutlu problemlerde kullanılabilir. Problemin boyutu büyüdükçe, listeleme çok zor hatta imkansızdır.

Daha önce açıklandığı gibi esas olarak bir tür ulaştırma problemi olması nedeniyle, herhangi bir atama problemi, ulaştırma problemlerinin klasik çözüm yöntemleriyle ve aynı süreç izlenerek çözülebilir. Ancak, bilinen yöntemlerden hangisi kullanılırsa kullanılsın, başlangıç çözümü dahil, bütün çözümler bozuk olacaktır.

Atama problemleri, kendilerine özgü tekniklerle daha az zaman harcayarak ve daha az işlem yapılarak çözülebilir. Burada **Macar yöntemi** açıklanacaktır.

Atama problemlerinin çözümünde kullanılan Macar yöntemi Macar matematikçi D. Konig tarafından formüle edilen sisteme dayanmaktadır. Yöntem, atama matrisinin herhangi bir satır veya sütununun tüm elemanlarına sabit bir sayının eklenmesi veya çıkarılmasının en iyi çözüme etki etmediği esasına dayanır.

Macar Yöntemi

Macar yönteminin atama problemlerinin çözümüne uygulanabilmesi için C_{ij}'lerin negatif olmaması gerekir. Yöntem, standart atama matrisinin herhangi bir satır veya sütununun tüm elemanlarına sabit bir sayının eklenmesi veya çıkartılmasının en iyi çözümü değiştirmediği esasına dayanır.

1. Adım: Maliyet matrisinin her bir satırının en küçük değeri, bulunduğu satırın tüm elemanlarından çıkartılır. Bu işlemle elde edilen matrise satırları indirgenmiş matris denir.

2. Adım: Satır indirgenmiş matrisin her bir sütununun en küçük değeri bulunduğu sütunun tüm elemanlarından çıkartılır. Bu yolla "satırları-sütunları indirgenmiş" bir maliyet (sonuç) matrisi elde edilir.

3. Adım: İkinci adımda belirlenen matrisin sıfır değerli elemanlarından geçen en az sayıdaki çizgiler çizilir. Çizgilerinin çizimi konusunda kararsızlığa düşmemek için, çizme işlemine sıfırı en çok olan satır veya sütunlardan başlanması önerilebilir. Koruma çizgisi sayısı matrisin satır/sütun sayısına eşit ise en iyi çözüm elde edilmiş olur. Sıfır değerine sahip gözelere, bire bir olmak koşuluyla, yapılacak atamalar sonunda en iyi çözüme ulaşılır. Çizilen en az sayıdaki çizgilerin sayısı n' ye eşit değilse dördüncü adıma geçilir.

4. Adım: Üzerinden çizgi geçmeyen elemanların en küçük değerli olanı belirlenir. Bu elemanın değeri üzerinden çizgi geçmeyen diğer bütün elemanlardan çıkartılır. Aynı değer çizgilerin kesişme noktalarındaki sayılara eklenir. Üzerinden çizgi geçen diğer elemanlar değişmeden kalır. Bu işlemlerden sonra üçüncü adıma dönülür.

En iyi çözüm bulununcaya kadar üçüncü ve dördüncü adımlar tekrarlanır.

Örnek

Örnek 7.10: Bir işletmenin en kısa sürede tamamlamak istediği dört işi ve bu işlerin yapımında kullandığı dört makinesi vardır. Aşağıdaki tabloda, makinelerin işleri tamamlama süreleri saat olarak verilmiştir. İşlerin en kısa toplam sürede tamamlanması istenmektedir. Problemin matematiksel modelini kurunuz.

Makine	İş			
	1	2	3	4
1	20	11	3	6
2	5	9	10	2
3	18	7	4	1
4	10	11	18	6

Çözüm

Çözüm 7.10: İşler en kısa sürede tamamlanmak istendiğinden, amaç fonksiyonu aşağıdaki gibi olur.

$$Z_{enk} = 20x_{11} + 11x_{12} + 3x_{13} + 6x_{14} + 5x_{21} + 9x_{22} + 10x_{23} + 2x_{24} + 18x_{31} + 7x_{32} + 4x_{33} + 1x_{34} + 10x_{41} + 11x_{42} + 18x_{43} + 6x_{44}$$

Her bir makine mutlaka bir işe atanacağından,

$$\left.\begin{aligned} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} &= 1 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} &= 1 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} &= 1 \\ x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} &= 1 \end{aligned}\right\} \text{Makine Kısıtlayıcıları}$$

yazılabilir.

Öte yandan, her bir işin mutlaka tamamlanması gerektiğinden, iş kısıtlayıcıları aşağıdaki gibi yazılabilecektir.

$$\left.\begin{aligned} x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} &= 1 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{32} &= 1 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} &= 1 \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} &= 1 \end{aligned}\right\} \text{İş Kısıtlayıcıları}$$

Son olarak negatif olmama koşulu, buna bağlı olarak modelin karar değişkenleri için,

$x_{ij} = 1$, i'inci (i = 1, 2, 3, 4) makine j'inci (j = 1, 2, 3, 4) iş için kullanılmışsa

$x_{ij} = 0$, i'inci (i = 1, 2, 3, 4) makine j'inci (j = 1, 2, 3, 4) iş için kullanılmamışsa

yazılmasıyla model formüle edilmiş olur.

Örnek 1

Örnek 3.20: Beş makinesi bulunan bir firma beş farklı iş siparişi almıştır. Bu işlerin en kısa sürede tamamlanması istenmektedir. Makinelerin işleri tamamlama süreleri aşağıdaki tabloda verilmiştir.

İşlerin en kısa toplam sürede tamamlanması istenmektedir. İşlerin en kısa sürede tamamlanmasını sağlayacak iş-makine eşleşmesini bulunuz.

Tablo 3.31

	Makine					
İş	1	2	3	4	5	a_i
A	**2**	4	9	**7**	10	1
B	4	6	8	**2**	3	1
C	**5**	7	9	11	13	1
D	10	9	8	7	**6**	1
E	5	5	3	4	**2**	1
b_j	1	1	1	1	1	5 = 5

Çözüm 1

Çözüm 3.20: Öncelikle her bir satırın en küçük değerli elemanının belirlenmesi gerekmektedir. Satır en küçükleri Tablo 3.31'de koyu basılmışlardır. Her bir satırdaki en küçük değerin bulunduğu satırın diğer elemanlarından çıkartılmasıyla satırları indirgenmiş süre matrisi aşağıdaki gibi elde edilir.

Tablo 3.32

	Makine					
İş	1	2	3	4	5	a_i
A	**0**	**2**	7	5	8	1
B	2	4	6	**0**	1	1
C	**0**	**2**	4	6	8	1
D	4	3	2	1	**0**	1
E	3	3	**1**	2	**0**	1
b_j	1	1	1	1	1	5 = 5

İkinci olarak, satırları indirgenmiş matrisin her bir sütunundaki en küçük değerli eleman belirlenecek ve bunlar bulundukları sütunun tüm elemanlarından çıkarılacaktır. Sütun en küçükleri satırları indirgenmiş matrisde koyu basılmışlardır. Çıkartma işleminin tamamlanmasıyla elde edilen, satırları ve sütunları indirgenmiş matris Tablo 3.33'de gösterilmiştir.

Çözüm 1

Bundan sonra, en iyi atama planına ulaşılıp ulaşılmadığını araştırmak amacıyla, satır-sütun indirgenmiş süre tablosundaki bütün sıfır değerlerinden geçen en az sayıdaki çizgiler çizilecektir.

Tablo 3.33

	Makine					
İş	1	2	3	4	5	a_i
A	**0**	0	6	5	8	1
B	2	2	5	**0**	1	1
C	0	**0**	3	6	8	1
D	4	1	1	1	**0**	1
E	3	1	**0**	2	0	1
b_j	1	1	1	1	1	5 = 5

Çizilen çizgi sayısı satır/sütun sayısına eşit olduğundan en iyi atama planı elde edilmiştir. En iyi atama planı, Tablo 3.33'de koyu basılmış sıfırların bulunduğu gözelerin dikkate alınmasıyla, aşağıdaki gibi elde edilir.

İş A $\leftrightarrow$ Mak. 1, İş B $\leftrightarrow$ Mak. 4, İş C $\leftrightarrow$ Mak. 2, İş D $\leftrightarrow$ Mak. 5, İş E $\leftrightarrow$ Mak. 3

En iyi olduğu belirlenen bu plana göre işlerin tamamlanması için gereken en kısa süre aşağıdaki gibi hesaplanır.

$Z_{enk} = C_{A1} + C_{B4} + C_{C2} + C_{D5} + C_{E3} = 2 + 2 + 7 + 6 + 3 = 20$ saat

Görüldüğü gibi Örnek 3.20'nin en iyi çözümü Macar yönteminin ilk üç adımının uygulanmasıyla belirlenmiştir.

Örnek 2

Örnek 3.21: Bir araştırma şirketinin elinde beş proje, bu projelerde görevlendireceği beş araştırmacısı vardır. Araştırmacıların projelere göre günlük ücretleri (TL) aşağıdaki tabloda gösterilmiştir. Şirket, araştırmacılarını günlük ücretler toplamını en küçükleyecek biçimde dağıtmak istemektedir. Günlük ücret toplamını en küçükleyecek proje-araştırmacı eşleşmesini bulunuz.

Tablo 3.34

	Proje				
Araştırmacı	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
A_1	**2**	4	5	6	8
A_2	**3**	5	6	4	5
A_3	6	**1**	2	3	4
A_4	5	7	8	9	**1**
A_5	**2**	3	5	9	10

Çözüm 3.21: Tablo 3.34'de koyu basılmış en küçük değerlerin ait oldukları satırın tüm elemanlarından çıkartılmasıyla elde edilen satırları indirgenmiş ücret matrisi aşağıda gösterilmiştir.

Tablo 3.35

Araştırmacı	Proje					a_i
	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	
A_1	**0**	2	3	4	6	1
A_2	**0**	2	3	**1**	2	1
A_3	5	**0**	**1**	2	3	1
A_4	4	6	7	8	**0**	1
A_5	**0**	1	3	7	8	1
b_j	1	1	1	1	1	5 = 5

Daha fazla sıfır elde etmek için satırları indirgenmiş matrisin her bir sütununun en küçük değerli elemanının (Tablo 3.35'de koyu basılmış) bulunduğu sütununun tüm elemanlarından çıkartılmasıyla elde edilen satırları ve sütunları indirgenmiş matris Tablo 3.36'da gösterilmiştir.

Tablo 3.36

Araştırmacı	Proje					a_i
	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	
A_1	0	2	2	4	6	1
A_2	0	2	2	0	2	1
A_3	5	0	0	1	3	1
A_4	4	6	6	7	0	1
A_5	0	1	2	6	8	1
b_j	1	1	1	1	1	5 = 5

Satırları ve sütunları indirgenmiş matrisin sıfırlarını kapatan koruma çizgileri, yoklama ile Tablo 3.36'daki gibi çizilmiştir. Tablodan görüldüğü gibi, çizilen çizgi sayısı dörde eşittir. Bu durumda, beş atamadan ancak dördü gerçekleştirileceğinden daha çok sıfır oluşturmak için dördüncü adıma geçilmesi gerekir.

Üzerinden çizgi geçmeyen en küçük değerli eleman 1'dir. Bu en küçük değerin çizgilerin kesişim noktalarındaki elemanlara eklenmesi, üzerinden çizgi geçmeyen elemanlardan çıkartılmasıyla daha çok sıfır kapsayan yeni matris Tablo 3.37'deki gibi elde edilir. Tablo 3.37'deki matrisin sıfır değerli elemanlarını kapatan koruma çizgileri yine yoklama ile Tablo 3.37'deki gibi çizilmiştir.

Tablo 3.37

Araştırmacı	Proje					a_i
	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	
A_1	**0**	1	1	2	5	1
A_2	1	2	2	**0**	2	1
A_3	6	0	**0**	1	3	1
A_4	5	6	6	7	**0**	1
A_5	0	**0**	1	5	7	1
b_j	1	1	1	1	1	5 = 5

Çizilen çizgi sayısı 5'e eşit olduğundan en iyi çözüm elde edilmiştir. Buna göre, $A_1 \leftrightarrow P_1$, $A_2 \leftrightarrow P_4$, $A_3 \leftrightarrow P_3$, $A_4 \leftrightarrow P_5$, $A_5 \leftrightarrow P_2$ eşlemeleriyle en küçük günlük toplam ücret aşağıdaki gibi hesaplanacaktır.

$$Z_{enk} = C_{11} + C_{24} + C_{33} + C_{45} + C_{52} = 2 + 4 + 2 + 1 + 3 = 12 \text{ TL}$$

Enbüyükleme Amaçlı Atama Problemi Örnek 3

En büyükleme amaçlı atama problemlerinin Macar yöntemiyle çözülmesine örnek olmak üzere aşağıdaki problemi ele alalım. Bunun için satır enbüyük değerinden diğer değerler çıkartılır ve daha sonra enküçükleme problem olarak çözülebilir.

Örnek 7.13: Bir pazarlama şirketinin piyasaya süreceği yeni ürünü için 4 farklı bölgede görevlendireceği dört satış elemanı vardır. Görevlendirilecek satış elemanına göre, bölgelerden beklenen satış gelirleri aşağıdaki tabloda verilmiştir. Satışlardan elde edilecek toplam geliri en büyükleyecek dağıtım planını belirleyiniz.

	Bölge			
Eleman	1	2	3	4
1	11	1	5	8
2	9	9	8	1
3	10	3	5	10
4	1	13	12	11

Çözüm 3

Önce satır enbüyük değerinden diğer satır değerleri çıartılır. Bu aşamadan sonraki işlemler en küçükleme amaçlı atama problemlerinde gerçekleştirilen işlemlerin aynıdır. Bu nedenle yapılan işlemleri açıklamadan tablolar üzerinde göstermekle yetineceğiz.

Tablo 7.53
Fırsat Kayıpları

Eleman	Bölge			
	1	2	3	4
1	0	10	6	3
2	0	0	1	8
3	0	7	5	0
4	12	0	1	2

Fırsat kayıpları matrisinin her satırında en az bir sıfır bulunduğundan satır indirgenmiş matris özgün fırsat kayıpları matrisinin aynıdır. Bu yüzden bu işlem atlanarak sütun indirgeme işlemine geçilir. Sütun indirgeme işleminin gerçekleştirilmesiyle elde edilen satır-sütun indirgemeli matrisli atama tablosu aşağıda gösterilmiştir. Sıfırları kapatma çizgileri aynı tabloda gösterilmiştir.

Çözüm 3

Tablo 7.54
Kapatma Çizgili İndirgenmiş Fırsat Kayıpları

Eleman	Bölge			
	1	2	3	4
1	**0***	10	5	3
2	0	**0***	**0**	8
3	0	7	4	**0***
4	12	**0**	0*	2

Tablodan görüldüğü gibi bütün sıfırların üzerinden geçen en az sayıdaki çizgilerin sayısı satır ve sütun sayısına eşit olduğundan, bu adımda yapılacak atamalar sonunda ortaya çıkacak çözüm en iyidir. Koyu renk basılmış sıfırlı gözelere yapılan bire bir eşlemeler sonucunda elde edilen en iyi atama planı aşağıda verilmiştir.

1'inci eleman, 1'inci bölgeye,

2'inci eleman, 3'üncü bölgeye,

3'üncü eleman, 4'üncü bölgeye,

4'üncü eleman, 2'inci bölgeye,

Bu atama planına göre günlük satış gelirinin en büyük değeri aşağıdaki gibi olur.

Toplam Satış geliri = 11 + 8 + 10 + 13 = 42 TL

Yıldızlı sıfırlara sahip gözelere yapılacak atamalar sonucunda da diğer bir en iyi atama planı elde edilir. İkinci bir en iyi atama planı şöyledir.

Aktarmalı Ulaştırma Problemi

Aktarmalı ulaştırma modeli, ulaştırma modelinin genel biçimidir. Sunum merkezlerinden istem merkezlerinin yanı sıra diğer sunum merkezlerine, ayrıca istem merkezlerinden diğer istem merkezleri ile diğer bütün sunum merkezlerine mal taşınmasının mümkün olduğu durumlarda ortaya çıkar. Ne gerçek bir sunum merkezi ne de gerçek bir istem merkezi olmakla birlikte, diğer merkezlere mal ulaştırmak amacıyla kendisine mal aktarılan merkezlerin bulunması da mümkündür.

Kısaca açıklamak gerekirse, ulaştırma modelinde yalnızca sunum merkezi veya yalnızca istem merkezi olma görevini üstlenmiş bulunan merkezler aktarmalı ulaştırma modelinde her iki görevi aynı anda yerine getirirler. Bu yolla, m sunum, n istem merkezi içeren bir ulaştırma modeli, (m + n) sunum merkezi, (m + n) istem merkezi bulunan aktarmalı ulaştırma modeline dönüşmüş olur.

Diğer bütün doğrusal programlama problemleri gibi aktarmalı ulaştırma problemleri de, 1. Amaç fonksiyonu, 2. Kısıtlayıcı fonksiyonlar, 3. Negatif olmama koşulu olmak üzere üç temel unsurdan oluşur.

Bir sunum merkezinin toplam sunum kapasitesi, kendi sunum miktarı (a_i) ile buraya diğer merkezlerin istemlerini karşılamak amacıyla gönderilen ürün miktarı toplamına eşittir.

Diğer taraftan, bir istem merkezinin sunumu diğer merkezlerin istemini karşılamak üzere kendisine transfer edilen ürün miktarına eşit olacaktır.

Ödev

Aşağıdaki ulaştırma problemini aktarmalı ulaştırma problemi olarak çözünüz.

Üretim Merkezi	Tüketim Merkezi 1	Tüketim Merkezi 2	Tüketim Merkezi 3	Sunum a_i
1	8	6	9	35
2	9	12	13	50
3	14	9	16	40
İstem b_j	45	60	20	$125 \neq 125$